MT09-A2012- Examen médian-Questions de cours : Correction

Exercice 1 *(barème approximatif : 1 point)*

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}$ et $B \in \mathcal{M}_{nn}$ deux matrices carrées ($n \geq 1$). Montrer que si AB est inversible, alors nécessairement A et B le sont.

On a $0 \neq \det(AB) = \det(A)\det(B)$, car A et B sont carrées. Donc $\det(A)$ et $\det(B)$ sont non nuls, et par conséquent A et B sont inversibles.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit A une matrice symétrique définie positive.

1. *Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.*

   Soit y un vecteur propre non-nul associé à une valeur propre λ pour A. Comme A est définie positive, on a $0 < y^T Ay = \lambda y^T y$, donc comme $y \neq 0$, $\lambda > 0$.

2. *Montrer que A est inversible.*

   0 n'est *pas* valeur propre, donc $\det(A - 0I) = \det(A) \neq 0$, donc A est inversible.

3. *Montrer que les valeurs propres de l'inverse de A sont les inverses des valeurs propres de A.*

   Soit y un vecteur propre non-nul associé à une valeur propre $\lambda > 0$ pour A. A étant inversible et λ non nul, on a : $Ay = \lambda y \iff y = \lambda A^{-1} y \iff A^{-1} y = \lambda^{-1} y$. Donc les inverses des valeurs propres de A sont valeurs propres de A^{-1}.

   On montre la réciproque en intervertissant le rôle de A et A^{-1} dans le raisonnement ci-dessus. On obtient ainsi que λ est valeur propre de A si et seulement si λ^{-1} est valeur propre de A^{-1}.

4. *On montre que pour une matrice symétrique A, on a $\|A\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(A)$ dénote le rayon spectral de A. En déduire une expression du conditionnement de A relatif à la norme 2, en fonction des valeurs propres de A.*

   Comme A^{-1} est symétrique définie positive (car A l'est, cf. question 3), le conditionnement de A s'écrit : $\mathrm{Cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \rho(A)\rho(A^{-1})$. On écrit les n valeurs propres de A : $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n$. Alors les n valeurs propres de A^{-1} sont : $0 < \lambda_n^{-1} \leq \lambda_{n-1}^{-1} \leq \ldots \lambda_1^{-1}$. Ceci implique que le conditionnement de A symétrique définie positive est le rapport de la plus grande valeur propre par la plus petite :

   $$\mathrm{Cond}(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. *Donner les hypothèses du cours pour lesquelles la méthode du point fixe*

   $$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

   converge.

   Cf. Cours. Trois hypothèses: g doit être de classe C^1 sur $[a, b] (a < b)$, g doit être contractante sur $[a, b]$, et l'intervalle $[a, b]$ doit être stable par g.

2. *On cherche maintenant à calculer numériquement une solution $\hat{x}$ de l'équation $\hat{x} = 2 + \ln \hat{x}$.*

   On utilise la méthode de point fixe, qui partant d'une valeur initiale x_0 calcule la suite $x_{n+1} = 2 + \ln x_n$.

   (a) *Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $2 + \ln(x) \in [2, +\infty[$.*

   On fait le tableau de variation de $g(x) = 2 + \ln x$, qui est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. $g'(x) = 1/x > 0$, g est croissante et $g(2) = 2 + \ln(2) > 2$, donc $g([2, +\infty[) \subset [2, +\infty[$.

   (b) *Montrer que si $x_0 \in [2, +\infty[$, la suite converge.*

   Pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $g'(x) = 1/x \in [0, 1/2]$, donc $|g'(x)| \leq 1/2 < 1$ et donc g est C^1 et contractante sur $[2, +\infty[$. **MAIS ATTENTION : on ne peut utiliser le théorème du point fixe sur l'intervalle $[2, +\infty[$, car celui-ci n'est pas borné!!!**

   Soit $x_0 \in [2, +\infty[$. On va se ramener à un intervalle du type $[2, M] \subset [2, +\infty[$ qui sera stable par g, pour un certain $M > x_0$. Pour cela, on étudie $f(x) = g(x) - x$. Pour tout $x > 1$, $f'(x) = 1/x - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$, donc f est décroissante. Comme $f(1) = 2 - 1 > 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, il existe $x^\star$ tel que $f(x^\star) = 0$ (c'est d'ailleurs le point fixe de g !). Soit $M > \max\{x_0, x^\star$, alors $f(M) < 0$ et l'intervalle $[2, M]$ est stable par g. En effet, g étant croissante, tout x dans $[2, M]$ est tel que $g(2) \leq g(x) \leq g(M)$. Par ailleurs, $g(2) > 2$, et $f(M) < 0$ implique que $g(M) < M$, donc au final $2 < g(2) \leq g(x) \leq g(M) < M$.

   Conclusion : l'intervalle $[2, M]$ est stable par g, g y est contractante (et C^1), donc on peut appliquer le théorème du point fixe sur $[2, M]$: la suite converge vers l'unique point fixe dans $[2, M]$.

MT09-A2012- Examen médian-Exercices : Correction

Exercice 1 : *(barème approximatif : 4,5 points)*

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{33}$ la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) *Montrer que la matrice A est inversible.*
   $\det A = 14 \neq 0$ donc A est inversible.

   (b) *Montrer que la matrice A admet une décomposition $A = LU$, sans calculer cette décomposition.*
   Les mineurs principaux de A sont inversibles, car $\det[A]_1 = 1 \neq 0$, $\det[A]_2 = 2 \neq 0$ et $\det[A]_3 = \det A \neq 0$, donc A admet une décomposition $A = LU$ (sans permutation).

   (c) *Calculer cette décomposition, en utilisant l'algorithme de Doolittle. (On prendra soin de détailler les calculs.)*
   Comme on sait que la décomposition $A = LU$ existe, on peut utiliser l'algorithme de Doolittle, qui procède par identification. On cherche la décomposition $A = LU$ sous la forme suivante :

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   On calcule d'abord la ligne $\underline{U}_1 = \underline{A}_1/1$ puis la colonne $L_1 = A_1/u_{11}$, ce qui donne : $u_{11} = 1$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 3$, puis $l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2$, $l_{31} = a_{31}/u_{11} = 3$. Ensuite, on recommence en calculant la ligne $\underline{U}_2$ puis la colonne L_2 : $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2$, $u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -4$, et $l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = 3$. On conclut en calculant $u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 7$. On obtient finalement

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

2. *Soit $B \in \mathcal{M}_{33}$ la matrice définie par*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

   (a) *La matrice B est-elle inversible ?*
   $\det B = 12 \neq 0$ donc B est inversible.

   (b) *La matrice B admet-elle une décomposition $B = LU$?*
   Le mineur principal $[B]_2$ n'est pas inversible car $\det[B]_2 = 0$, donc B n'admet pas de décomposition LU. Il faudrait permuter des lignes ou des colonnes pour pouvoir effectuer une décomposition de B.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4,5 points)*

Soit une suite (x_n) convergeant vers une limite $\hat{x}$. On suppose en outre qu'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que

$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|.$$

1. *En déduire que*
$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|.$$

   Récurrence immédiate : le cas $n = 1$ donne $|x_2 - x_1| \leq k|x_1 - x_0|$.

   De plus, si on a $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$, alors
$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n| \leq k\, k^n |x_1 - x_0|,$$
   ce qui conclut la récurrence.

2. *Soit p un entier supérieur à n. Sachant que*
$$|x_p - x_n| \leq |x_p - x_{p-1}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n|,$$
   en déduire que,
$$|x_p - x_n| \leq \left(k^{p-1} + \cdots + k^n\right) |x_1 - x_0|. \tag{5}$$

   Comme $x_p - x_n = (x_p - x_{p-1}) + (x_{p-1} - x_{p-2}) + \cdots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)$, l'inégalité triangulaire et la question précédente donnent
$$\begin{aligned} |x_p - x_n| &\leq |x_p - x_{p-1}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(k^{p-1}|x_1 - x_0| + \cdots + k^{n+1}|x_1 - x_0| + k^n|x_1 - x_0|\right) \\ &\leq \left(k^{p-1} + \cdots + k^{n+1} + k^n\right) |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

3. *On rappelle que la somme des puissances de k ci-dessus est égale à :*
$$\left(k^{p-1} + \cdots + k^n\right) = k^n \frac{1 - k^{p-n}}{1 - k}.$$
   En déduire une nouvelle expression de la majoration (5).

   On a immédiatement
$$\begin{aligned} |x_p - x_n| &\leq \left(k^{p-1} + \cdots + k^{n+1} + k^n\right) |x_1 - x_0| \\ &\leq k^n \frac{1 - k^{p-n}}{1 - k} |x_1 - x_0| \\ &\leq k^n \frac{1}{1 - k} |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$
   car $0 < k < 1$.

4. *En faisant alors tendre p vers l'infini, en déduire une majoration de l'erreur $|\hat{x} - x_n|$ en fonction de k, n et $x_1 - x_0$.*

   On fait tendre p vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus. Le membre de droite est indépendant de p, et dans celui de gauche x_p tend vers la limite $\hat{x}$. Donc à la limite
$$|\hat{x} - x_n| \quad \leq \quad k^n \frac{1}{1 - k} |x_1 - x_0|.$$

5. *On suppose k connu. Calculer une estimation du nombre d'itérations N pour lequel on est assuré que l'erreur relative $\frac{|\hat{x}-x_n|}{|x_1-x_0|}$ est inférieure à un $\varepsilon > 0$ donné. Application : on suppose que $k = 1/2$ et on prend $\varepsilon = e^{-10}$, que vaut K ? (On prendra l'approximation* $\ln(2) \approx 2/3$.*)*

   On a montré que

$$\frac{|\hat{x} - x_n|}{|x_1 - x_0|} \quad \leq \quad k^n \frac{1}{1-k},$$

   donc si on peut trouver n tel que

$$k^n \frac{1}{1-k} \quad \leq \quad \varepsilon,$$

   on aura l'inégalité souhaitée $\frac{|\hat{x}-x_n|}{|x_1-x_0|} \leq \varepsilon$. Trouver un tel n est possible car $k^n \to 0$ quand $n \to \infty$, du fait que $0 < k < 1$.

$$\begin{aligned}
k^n \frac{1}{1-k} \leq \varepsilon \iff & \ln(k^n) \leq \ln(1-k) + \ln(\varepsilon), \quad \text{car ln est croissante et } 1-k > 0, \\
\iff & n \ln(k) \leq \ln(1-k) + \ln(\varepsilon) \\
\iff & n \geq \frac{\ln(1-k) + \ln(\varepsilon)}{\ln(k)}, \quad \text{car } \ln(k) < 0 \ (\textbf{attention à l'inversion d'inégalité}).
\end{aligned}$$

   Donc pour tout n plus grand que $N_0 = E\left(\frac{\ln(1-k)+\ln(\varepsilon)}{\ln(k)}\right)$ (E représente ici la partie entière), on aura l'inégalité souhaitée.

   Application :

$$n \geq \frac{\ln(1-k) + \ln(\varepsilon)}{\ln(k)} = \frac{\ln(1/2) + \ln(e^{-10})}{\ln(1/2)} = \frac{-\ln(2) - 10}{-ln(2)} = \frac{\ln(2) + 10}{ln(2)} \approx \frac{32}{2} = 16.$$

   Donc, quand $k = 1/2$, si $n \geq 16$, on est assuré que la suite aura convergé à $e^{-10} \approx 4,5\,10^{-5}$ près.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 6 points)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

1. *Calculer les valeurs propres de A. On rappelle que les valeurs propres d'une matrice A sont les racines de l'équation polynomiale* $\det(A - \lambda I) = 0$*.*

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a-1+\lambda & a-1+\lambda \\ a & 1-\lambda-a & 0 \\ a & 0 & 1-\lambda-a \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+a-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+a-1)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 1+a-\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+a-1)^2 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1+a-\lambda & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+a-1)^2(2a+1-\lambda).
\end{aligned}$$

   Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1-a$ (double) et $\lambda_2 = 1+2a$ (simple).

2. *On démontre, et nous l'admettrons, qu'une matrice symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. En déduire que A est symétrique définie positive si et seulement si $-1/2 < a < 1$.*

   A est symétrique définie positive si et seulement si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, soit a tel que $1 - a > 0$ et $1 + 2a > 0$. Ceci est équivalent à $-1/2 < a < 1$.

3. *Écrire une fonction Scilab qui implémente la méthode de Jacobi pour une matrice $C \in \mathcal{M}_{nn}$:*

   ```
   [x]=jacobi(C,b,x0,eps,Kmax)
   ```

   On donnera la signification des divers paramètres de cette fonction.

   Cf. TP 4, où on demande de programmer Gauss-Seidel... Itération du type :

   $$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k \right).$$

   `x0` est la valeur initiale de l'itération. `eps` est la tolérance pour le critère d'arrêt : on demande généralement $||x^{k+1} - x^k|| < \epsilon$ (erreur absolue) ou $\frac{||x^{k+1}-x^k||}{||x^k-x^{k-1}||} < \epsilon$ (erreur relative). `Kmax` est le nombre maximal d'itérations que l'on souhaite faire. Typiquement, si on atteint `Kmax` itérations, on n'a pas convergé avec la tolérance souhaitée.

4. *Écrire la matrice $J = M^{-1}N$ qui définit les itérations de Jacobi, appliquée à la matrice A définie en (6).*

   D'après le cours, $J = D^{-1}(E + F)$, soit ici $(D = I)$:

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} = I - A.$$

5. *Soit une matrice $B \in \mathcal{M}_{nn}$. Montrer que λ est valeur propre de B si et seulement si $-\lambda + \alpha$ est valeur propre de $-B + \alpha I$.*

   $$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre pour } B &\iff \exists y \neq 0 \text{ tel que } By = \lambda y \\ &\iff \exists y \neq 0 \text{ tel que } (-B + \alpha I)y = (-\lambda + \alpha)y \\ &\iff -\lambda + \alpha \text{ valeur propre pour } -B + \alpha I. \end{aligned}$$

6. *Calculer le rayon spectral de J. En déduire que la méthode de Jacobi converge pour A si et seulement si $-1/2 < a < 1/2$.*

   Par définition, $\rho(J) = \max\{|\mu|, \mu \text{ valeur propre de } J\}$. Comme $J = I - A$, les valeurs propres de J sont $\mu_j = 1 - \lambda_j$, $j = 1, 2$, où les λ_j sont les valeurs propres de A. Il vient $\mu_1 = a$ et $\mu_2 = -2a$ et donc $\rho(J) = 2|a|$. La méthode de Jacobi appliquée à A converge pour tout x_0 si et seulement si $\rho(J) < 1$, soit $|a| < 1/2$.