MT09-Analyse numérique élémentaire

Chapitre 4 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires et non-linéaires

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Novembre 2007

Chapitre IV
Méthodes itératives

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1 Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

IV.1.1 Principes généraux

Les méthodes itératives sont utilisées soit pour la résolution de systèmes linéaires de très grande taille, soit lorsque l'on dispose d'une estimation de la solution que l'on veut améliorer.

Une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ qui, on l'espère, ou mieux on le démontre, convergera vers la solution du système linéaire à résoudre.

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice régulière et $b \in \mathbb{R}^n$ donnés. On se propose de résoudre le problème

$$f(x) = Ax - b = 0$$

par une méthode itérative de la forme suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

où les matrices M, $N \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, M inversible, sont convenablement choisies.

Si cette méthode itérative converge, c'est-à-dire si la suite $x^{(k)}$ converge vers $\bar{x}$ alors on a, à la limite,

$$(M - N)\bar{x} = b,$$

ce qui correspondra à la résolution de $Ax = b$ si

$$A = M - N.$$

Il y a une infinité de choix possibles pour M et N vérifiant $A = M - N$, nous allons en donner deux à titre d'exemples. L'idée est bien sûr de choisir une matrice M particulièrement facile à inverser, par exemple diagonale, ou bien triangulaire inférieure. Ces deux choix correspondent respectivement à la *méthode de Jacobi* et à la *méthode de Gauss-Seidel*.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.1.2 La méthode de Jacobi

Exercices :
Exercice IV.1
Exercice IV.2

Le système linéaire $Ax = b$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & = & b_1, \\ & \dots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & = & b_i, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1, \\ & \dots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & = & b_n. \end{array}\right.$$

La méthode de Jacobi consiste, à chaque itération k, à résoudre chaque équation par rapport à l'une des variables, les autres étant fixées à leurs valeurs obtenues à l'itération précédente. Soit donc le vecteur $x^{(k)}$ donné, alors on détermine successivement les composantes de $x^{(k+1)}$ par les formules :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1^{(k+1)} & = & b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}, \\ & \dots & \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} & = & b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1, \\ & \dots & \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)}. \end{array}\right.$$

Les formules précédentes ne définissent effectivement $x^{(k+1)}$ que si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls. Ceci n'est pas une restriction, car on peut démontrer que si une matrice

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

est inversible, il existe une permutation de ses lignes telle que tous les éléments de la diagonale de la matrice ainsi obtenue soient non nuls (voir exercice).

On peut écrire les relations précédentes sous forme matricielle. Pour cela introduisons la décomposition suivante de A :

$$A = D - E - F,$$

avec

- D matrice diagonale contenant la diagonale de A,
- E matrice triangulaire inférieure (triangle inférieur de $-A$),
- F matrice triangulaire supérieure (triangle supérieur de $-A$),

Avec ces notations on peut écrire le système $Ax = b$ sous la forme

$$Dx = (E + F)x + b,$$

La méthode de Jacobi s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné,} \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b. \end{cases}$$

IV.1.3 La méthode de Gauss-Seidel

Exercices :
Exercice IV.3

Cours :
Jacobi

Il s'agit d'une modification de la méthode de Jacobi qui consiste à utiliser pour chaque équation les composantes de $x^{(k+1)}$ déjà calculées, ceci conduit aux formules

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1^{(k+1)} & = & b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)}, \\ \vdots & & \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} & = & b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n-1, \\ \vdots & & \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}. \end{array}\right.$$

Sous forme matricielle cela revient à écrire le système $Ax = b$ sous la forme

$$(D - E)x = Fx + b,$$

où les matrices D, E et F ont été données dans le paragraphe référencé sur la méthode de Jacobi.

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné}, \\ (D - E)x^{(k+1)} = (Fx^{(k)} + b), \end{array}\right.$$

A chaque itération la matrice du système à résoudre est triangulaire inférieure.

On observe que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel que nous venons de voir peuvent se mettre sous la forme $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$:

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- $M = D,\ N = E + F$, pour la méthode de Jacobi,
- $M = D - E,\ N = F$, pour la méthode de Gauss-Seidel.

IV.1.4 Etude de la convergence des méthodes itératives

Exercices :
Exercice IV.4

Commençons par étudier la convergence de la méthode itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \end{cases} \tag{IV.1.1}$$

Proposition IV.1.1. *S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que*

$$\|C\| < 1$$

la méthode (IV.1.1) est convergente quel que soit le choix de $x^{(0)}$ et elle converge vers la solution de

$$(I - C)\bar{x} = d.$$

Démonstration - Tout d'abord la solution $\bar{x}$ du système d'équations $(I - C)\bar{x} = d$ existe et elle est unique, car la matrice $I - C$ est inversible. En effet

$$x \in \ker(I - C) \Leftrightarrow x = Cx \Rightarrow \|x\| = \|Cx\| \leq \|C\| \, \|x\|,$$

si $\|x\| \neq 0$, on aurait, après simplification $1 \leq \|C\|$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. On vient de montrer que $\ker(I - C) = \{0\}$, ce qui est équivalent puisque la matrice $I - C$ est carrée à $I - C$ inversible

Montrons maintenant que $x^{(k)}$ converge vers $\bar{x}$ solution de $(I - C)\bar{x} = d$. On a

$$x^{(k)} - \bar{x} = C(x^{(k-1)} - \bar{x}) = C^2(x^{(k-2)} - \bar{x}) = \ldots = C^k(x^{(0)} - \bar{x}),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

d'où
$$\|x^{(k)} - \bar{x}\| \leq \|C^k\| \, \|x^{(0)} - \bar{x}\| \leq \|C\|^k \, \|x^{(0)} - \bar{x}\|.$$
Passons à la limite quand k tend vers l'infini. Puisque $\|C\| < 1$, $\|C\|^k$ tend vers 0 et donc $x^{(k)}$ tend vers $\bar{x}$.

Définition IV.1.1. *On dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante si*
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \; \forall \, i, \; 1 \leq i \leq n. \qquad \text{(IV.1.2)}$$

Proposition IV.1.2. *Si la matrice A est à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentes.*

Démonstration - Démontrons cette proposition pour la méthode de Jacobi. La démonstration sera faite en travaux dirigés pour la méthode de Gauss-Seidel.

La méthode de Jacobi s'écrit
$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b + (E + F)x^{(k)}],$$
et donc la matrice d'itération est
$$C = D^{-1}(E + F).$$
Puisque A est à diagonale dominante, on a
$$\|D^{-1}(E + F)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1$$
et donc la méthode est convergente.

Un autre résultat intéressant pour les applications est le suivant (nous l'admettrons sans démonstration) :

Proposition IV.1.3. *Si la matrice A est symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.*

Un résultat intéressant et admis sur la convergence des méthodes itératives donne une caractérisation à partir du rayon spectral de la matrice C.

Théorème IV.1.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode itérative (IV.1.1) soit convergente est que*

$$\rho(C) < 1.$$

IV.2 Résolution d'une équation non-linéaire à une inconnue

IV.2.1 Méthode de la dichotomie

Exercices :
Exercice IV.5

On veut résoudre $f(x) = 0$, où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non linéaire (sinon c'est évident !). On recherche donc un nombre réel x^* tel que $f(x^*) = 0$. Comme pour toute méthode itérative, on va donc construire une suite de nombres réels $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ qui converge vers x^*. Puisqu'ici les termes de la suite sont des nombres réels, on les notera plus simplement $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$.

Le principe de la dichotomie est très simple. On suppose que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(a)f(b) < 0$, c'est-à-dire qu'il y a au moins une racine réelle de f dans $[a,b]$. On prend alors le milieu de l'intervalle $c = \dfrac{a+b}{2}$. Si $f(c) = 0$ (ou numériquement très proche de 0) on considère que l'on a résolu le problème. Autrement deux cas peuvent se présenter. Si $f(a)f(c) < 0$, alors f a une racine réelle dans $[a,c]$ (au moins une, en tous cas, un nombre impair de racines), autrement $f(a)f(c) > 0$ et donc $f(a)f(b)f(a)f(c) < 0$, ce qui donne $f(b)f(c) < 0$ et f a une racine réelle dans $[c,b]$. On itère alors le processus avec l'intervalle qui contient au moins une racine.

La méthode de dichotomie s'écrit :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2},$$

si $f(x_k)f(a_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$ sinon $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2},$$

Il est clair qu'à chaque itération la longueur l_k de l'intervalle de localisation de la racine x^* est divisée par 2. On sait de plus que $|x_k - x^*| \leq l_k$, d'où le résultat de convergence de la suite (x_k) vers x^* si on montre que l_k tend vers 0

Proposition IV.2.1. *La suite de segments* $([a_k, b_k])_{k\geq 0}$ *est telle que*

$$l_k = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},\ k \geq 1.$$

Cette proposition est utile sur le plan numérique ; en effet elle renseigne sur le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer la racine à ϵ près, $\epsilon > 0$ étant une précision fixée à l'avance par l'utilisateur (test d'arrêt). En effet, on peut montrer (en exercice) que ce nombre n doit vérifier

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right).$$

IV.2.2 Le principe des méthodes de point fixe

Exercices :
Exercice IV.6

Pour résoudre $f(x) = 0$, on peut se ramener à un problème équivalent de la forme $g(x) = x$ (par exemple en posant $g(x) = f(x) + x$). Mais il y a beaucoup de choix possibles pour définir g ! La résolution de $g(x) = x$ s'appelle recherche des points fixes de g.

Par exemple pour calculer la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$, on résout $x^2 = a$. Il existe alors différentes manières de se ramener à un problème de point fixe :

–
$$x = \frac{a}{x}, \text{ et } \; g_1(x) = \frac{a}{x},$$

–
$$2x = x + \frac{a}{x} \text{ soit } \; x = 2x - \frac{a}{x} \text{ et } \; g_2(x) = 2x - \frac{a}{x},$$

–
$$x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}, \text{ et } \; g_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}.$$

Pour résoudre $g(x) = x$, problème équivalent à $f(x) = 0$, les méthodes dites de point fixe, consistent à construire la suite $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{k+1} = g(x_k), \; k > 0 \end{cases}$$

Si la suite (x_k) converge, la continuité de g implique qu'elle converge vers un point fixe x^* de g. En effet

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = g(\lim_{k\to\infty} x_k) = g(x^*).$$

Vous verrez en exercice comment se comportent graphiquement les différentes suites dans le cas des exemples cités plus haut. Vous vous apercevrez qu'elles ne convergent pas toujours et qu'il faut donc choisir soigneusement la fonction g. Le paragraphe suivant donne quelques conditions sur la fonction g pour que la suite converge.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.2.3 Convergence des méthodes de point fixe

Exercices :
Exercice IV.7
Exercice IV.8
Exercice IV.9
Exercice IV.10

Cours :
Point fixe/ Principe

Proposition IV.2.2. *Soit une fonction* $g : [a, b] \to [a, b]$ *continûment dérivable sur* $[a, b]$ *et supposons que*

$$|g'(x)| \leq k < 1, \ \forall x \in [a, b].$$

Alors g *possède un point fixe unique* $x^* \in [a, b]$ *et la suite*

$$\begin{cases} x_0 \textit{ donné dans } [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n), \ n > 0 \end{cases}$$

converge vers x^*.

Démonstration - La première partie est une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, si l'on n'est pas dans les cas évidents $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, la fonction $H(x) = g(x) - x$ est telle que $H(a)(= g(a) - a) > 0$ (car $g(a) \in [a, b]$) et $H(b)(= g(b) - b) < 0$ (car $g(b) \in [a, b]$). Il existe donc un point x^* de $]a, b[$ tel que $H(x^*) = 0$, c'est-à- dire un point fixe de g. On montre aisément en exercice que ce point fixe est unique.

Pour montrer la convergence de la suite vers x^*, on calcule

$$|x_n - x^*| = |g(x_{n-1}) - g(x^*)| \leq k|x_{n-1} - x^*|.$$

Convergence des méthodes de point fixe

En itérant le processus, on trouve

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|.$$

Puisque $k < 1$, la suite k^n tend vers 0 quand $n \to \infty$, ce qui démontre la convergence de la suite.

Remarquons que si l'on a une application $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $|g'(x)| \geq k \geq 1$, $\forall x \in [a, b]$ et qui possède un point fixe dans $[a, b]$, alors la suite (x_n) précédemment définie est divergente au sens suivant. Soit x_n sort du domaine de définition de g, soit

$$|x_n - x^*| \geq k^n |x_0 - x^*|$$

et donc la suite (x_n) s'éloigne de x^* (au mieux elle reste à une distance constante si $k = 1$).

On dit que les méthodes de point fixe ont une convergence linéaire car

$$|x_{n+1} - x^*| = |g(x_n) - g(x^*)| \leq k |x_n - x^*|.$$

De même que pour la dichotomie, on peut estimer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. En effet, vous pourrez montrer en exercice, que

$$|x_n - x^*| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

Donc, pour une précision ϵ donnée, le nombre d'itérations n est donné par

$$\frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \epsilon \Rightarrow n \leq \frac{\ln \frac{(1-k)\epsilon}{|x_1 - x_0|}}{\ln k}.$$

Dans la proposition précédente, on a supposé que la valeur absolue de la dérivée était majorée par 1 sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier. Si l'on considère l'exemple de la racine carrée d'un nombre réel a traité dans le paragraphe référencé, on a décrit trois fonctions g pour lesquelles le point fixe x^* correspond à cette racine carrée. Calculons les dérivées correspondantes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- $g_1(x) = \frac{a}{x}$, $g_1'(x) = -\frac{a}{x^2}$, $g_1'(x^*) = -1$,
- $g_2(x) = 2x - \frac{a}{x}$, $g_2'(x) = 2 + \frac{a}{x^2}$, $g_2'(x^*) = 3$,
- $g_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{x}$, $g_3'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$, $g_3'(x^*) = 0$.

Proposition IV.2.3. *Soit x^* un point fixe de g, fonction continûment dérivable, tel que $|g'(x^*)| < 1$, alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers x^* si x_0 est suffisamment proche de x^*.*

Démonstration - Puisque g' est continue, il existe un intervalle contenant x^* tel que $|g'(x)| < 1$. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|g'(x)| < 1, \quad \forall x \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha].$$

Il est alors facile de montrer que g est une application de $I = [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ dans lui-même. En effet si $x \in I$,

$$|g(x) - x^*| = |g(x) - g(x^*)| \leq \max_{x \in I} |g'(x)||x - x^*| \leq \alpha.$$

D'autre part, puisque la fonction $|g'|$ est continue, elle atteint son maximum sur l'intervalle I et donc $|g'(x)| \leq k < 1$, pour tout x de I. Ceci permet d'appliquer la proposition du paragraphe référencé et de montrer ainsi que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers x^* si x_0 est dans I, c'est-à-dire suffisamment proche de x^*.

Remarquons que si $|g'(x^*)| > 1$, il existe un intervalle $[x^* - \alpha, x^* + \alpha]$ sur lequel $|g'(x)| \geq k > 1$. La suite (x_n) définie précédemment a peu de chance de converger vers x^*. En effet si on part proche de x^*, on a

$$|x_1 - x^*| \geq k|x_0 - x^*| > |x_0 - x^*|$$

et x_1 s'éloigne de x^*. Il en sera ainsi jusqu'à ce que l'on sorte de l'intervalle $[x^* - \alpha, x^* + \alpha]$. Alors, comme on ne connaît pas le comportement de g, il se peut qu'un itéré postérieur "re-rentre" dans l'intervalle. La seule chance que l'on a de converger, c'est alors de "tomber" sur x^*. Cette méthode n'est donc pas à utiliser dans ce cas.

IV.2.4 La méthode de Newton pour résoudre une équation

Exercices :
Exercice IV.11

La méthode de Newton s'utilise pour calculer une racine de $f(x) = 0$, où f est une fonction deux fois continûment dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. En voici le principe : soit x_0 donné, on écrit le développement de Taylor en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0).$$

La méthode de Newton consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1 (ce qui revient à assimiler localement la courbe à sa tangente) et à considérer alors que x_1 est le point qui annule l'approximation de f ainsi obtenue, c'est-à-dire

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0),$$

ce qui donne

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

L'étape ainsi décrite qui permet de passer de x_0 à x_1 permet aussi de passer de x_n à x_{n+1}.

L'algorithme de Newton pour résoudre une équation $f(x) = 0$ est le suivant

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une méthode de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ pour laquelle g est définie par

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

La méthode de Newton est une méthode de point fixe telle que $g'(x^*) = 0$ c'est-à-dire que la dérivée s'annule au point fixe de la fonction g.

Une autre manière de présenter la méthode de Newton, plus graphique, est d'obtenir x_{n+1} comme l'intersection de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_n avec l'axe $0x$ (voir l'exercice).

Si la méthode de point fixe converge vers x^*, alors on a en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

On voit alors que l'on obtient bien $f(x^*) = 0$ si $f'(x^*) \neq 0$. On suppose dorénavant que cette condition est remplie c'est-à-dire que la courbe $y = f(x)$ n'est pas tangente à l'axe Ox lorsqu'elle coupe cet axe.

IV.2.5 Convergence de la méthode de Newton pour résoudre une équation

Exercices :
Exercice IV.12

Proposition IV.2.4. *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que la suite générée par la méthode de Newton*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers x^* pour tout $x_0 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$.

Démonstration - Comme il s'agit d'une méthode de point fixe de la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, on calcule la dérivée de cette fonction au point fixe

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{f'(x)^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

et puisque $f(x^*) = 0$ on a $g'(x^*) = 0$. On peut donc appliquer la proposition IV.2.3 qui montre l'existence de α tel que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers le point fixe si $x_0 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha]$.

Cette proposition donne une condition suffisante de convergence mais heureusement la méthode de Newton converge souvent même si l'on part loin de la solution. Montrons maintenant que la vitesse de convergence est quadratique, ce qui est mieux que linéaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition IV.2.5. *Soit g une fonction deux fois continûment dérivable de $[a, b]$ dans $[a, b]$, soit $x^* \in [a, b]$ tel que $g(x^*) = x^*$ et $g'(x^*) = 0$, soit $x_0 \in [a, b]$, on définit $x_{n+1} = g(x_n)$, alors :*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2}|x_n - x^*|^2$$

où $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |g''(x)|$.

Démonstration - Le développement de Taylor au point x^* est donné par

$$g(x_n) = g(x^*) + (x_n - x^*)g'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} g''(\xi)$$

où ξ est strictement compris entre x_n et x^*. Etant données les hypothèses sur g, on obtient

$$|x_{n+1} - x^*| = \frac{(x_n - x^*)^2}{2}|g''(\xi)| \leq \frac{M}{2}|x_n - x^*|^2.$$

On dit alors que la vitesse de convergence est quadratique.

IV.2.6 La méthode de la sécante

Exercices :
Exercice IV.13
Exercice IV.14

Cours :
Newton/ Convergence

Cette méthode peut être vue comme une approximation de la méthode de Newton, présentée dans le paragraphe référencé. En effet la méthode de Newton nécessite le calcul de la dérivée de la fonction en un point à chaque itération. Si le calcul de la dérivée est coûteux en temps ou peu précis (par exemple c'est le résultat d'une approximation numérique), on peut approcher la dérivée de la manière suivante

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

On obtient ainsi la méthode de la sécante :

$$\begin{cases} x_0,\ x_1 \text{ donnés tels que } f(x_0)f(x_1) < 0, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \end{cases}$$

Ceci signifie, graphiquement, que l'on remplace la tangente par la "corde". Il s'agit en effet de l'intersection de la droite passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ avec l'axe Ox (exercice).

Cette méthode n'est pas une méthode de point fixe puisque chaque point de la suite est construit à partir des deux précédents. La convergence de la suite ne peut être assurée que pour certaines valeurs de x_0 et x_1 suffisamment proches de x^*, solution de $f(x^*) = 0$. L'étude de l'erreur est compliquée mais elle montre que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq K|x_n - x^*|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

où K est une constante qui dépend de la fonction f et de la racine x^*. La vitesse de convergence, égale au nombre d'or, est plus grande que pour une convergence linéaire mais moins importante que pour une convergence quadratique puisque

$$1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2.$$

Cette méthode devrait donc converger moins vite que la méthode de Newton. Mais une itération de la sécante ne demande qu'une évaluation de f au point x_n (sauf pour la première itération) tandis que la méthode de Newton demande l'évaluation de f et f'. Donc, même si on suppose que l'évaluation de f et de f' a le même coût, une itération de Newton représente deux itérations de la sécante. Donc pour la comparaison des vitesses de convergence c'est $\sqrt{2} = 1,414$ qu'il faut comparer à $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$ et ainsi la comparaison tourne à l'avantage de la sécante.

Toutefois un inconvénient de la méthode de la sécante, telle qu'on l'a décrite, est que si deux points successifs sont sur une droite "presque parallèle" à l'axe Ox, l'intersection avec l'axe Ox part à l'"infini". Une variante de la méthode consiste à s'assurer que deux points successifs encadrent toujours la racine de f. On part donc de x_0 et x_1 qui encadrent x^* et pour calculer x_{n+1} on n'utilise x_n et x_{n-1} que s'ils entourent x^*. Sinon, on utilise x_n et x_{n-2}. On peut montrer alors que pour une fonction f dont la concavité a un signe constant autour de x^*, un des points servant à calculer x_{n+1} se fige (exercice) de sorte que, la méthode se comporte comme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}.$$

On retombe alors sur une méthode de point fixe qui a une vitesse de convergence linéaire. On obtient ainsi une convergence globale au détriment de la vitesse de convergence.

IV.3 Résolution d'un système d'équations non-linéaires

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

IV.3.1 La méthode de Newton pour deux équations non-linéaires

Exercices :
Exercice IV.15

Cours :
Newton/ Convergence

On veut maintenant résoudre deux équations à deux inconnues :

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

On manipule maintenant des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ que l'on peut noter
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$

Comme pour toutes les méthodes itératives que l'on a vues dans ce chapitre, on va construire une suite de vecteurs censée converger vers une solution de $f(x) = 0$, on notera les vecteurs de la suite $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)}, ...$

L'approximation par un développement de Taylor au premier ordre que nous avons utilisée pour introduire la méthode de Newton pour une équation peut être étendue à deux équations voire à n équations. Explicitons-la pour 2 équations :

Soit $x^{(0)}$ un couple donné. Ecrivons le développement de Taylor en ce point

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1\left(x^{(0)}\right) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right)\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^{(0)})\left(x_2 - x_2^{(0)}\right) + \text{reste}, \\ f_2(x) = f_2\left(x^{(0)}\right) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right)\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^{(0)})\left(x_2 - x_2^{(0)}\right) + \text{reste}. \end{cases}$$

Si l'on note $Df\left(x^{(0)}\right)$ la matrice jacobienne de f au point $x^{(0)}$ définie par :

$$Df\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\nabla f_1\left(x^{(0)}\right)\right)^T \\ \left(\nabla f_2\left(x^{(0)}\right)\right)^T \end{pmatrix},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

avec

$$\nabla f_1\left(x^{(0)}\right)=\left(\begin{array}{c}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right)\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right)\end{array}\right) \text{ et } \nabla f_2\left(x^{(0)}\right)=\left(\begin{array}{c}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right)\end{array}\right),$$

les relations précédentes peuvent s'écrire :

$$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)+Df\left(x^{(0)}\right)\left(x-x^{(0)}\right)+\text{ Reste },$$

soit encore :

$$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)+\left(\begin{array}{c}\left(\nabla f_1\left(x^{(0)}\right)\right)^T\left(x-x^{(0)}\right)\\ \left(\nabla f_2\left(x^{(0)}\right)\right)^T\left(x-x^{(0)}\right)\end{array}\right)+\text{ Reste }.$$

Attention : $f(x), f\left(x^{(0)}\right), x-x^{(0)}$, " Reste ", $\nabla f_1\left(x^{(0)}\right), \nabla f_2\left(x^{(0)}\right)$ sont des vecteurs colonnes. $Df\left(x^{(0)}\right)$ est une matrice. $Df\left(x^{(0)}\right)\left(x-x^{(0)}\right)$ est un vecteur colonne. Tous les produits et sommes sont donc bien cohérents.

On néglige le reste, on calcule l'itéré suivant $x^{(1)}$ en annulant l'approximation de f ainsi obtenue.

$$0=f\left(x^{(0)}\right)+Df\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)}-x^{(0)}\right)$$

Le vecteur $x^{(1)}-x^{(0)}$ se calcule en résolvant un système linéaire :

$$Df\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)}-x^{(0)}\right)=-f\left(x^{(0)}\right)$$

Quand on a obtenu le vecteur $h=x^{(1)}-x^{(0)}$, on calcule $x^{(1)}=h+x^{(0)}$.

On recommence les mêmes étapes pour obtenir le vecteur $x^{(2)}$ à partir du vecteur $x^{(1)}$. On s'arrête lorsque la différence de deux itérés successifs, c'est-à-dire le vecteur h est inférieur en norme à un epsilon fixé à l'avance.

La méthode de Newton pour résoudre le système de deux équations non-linéaires $f(x)=0$ est donnée par :

On se donne $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}^2$, puis pour $k\geq 0$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

1. On résout le système linéaire $Df(x^{(k)})h = -f(x^{(k)})$.
2. On pose $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$.

Lorsqu'il s'agit de deux équations non-linéaires, il est facile d'inverser la matrice pour résoudre le système. Par contre lorsque l'on a n équations non-linéaires à résoudre, on utilise une méthode de Gauss pour résoudre le système linéaire qui permet de calculer la différence entre deux itérés successifs.

IV.3.2 Les méthodes de point fixe

Cours :
Point fixe/ Principe
Point fixe/ Convergence

Documents :
Document IV.1

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont une généralisation des résultats en dimension un présentés dans les paragraphes référencés. g est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, x et $g(x)$ sont des vecteurs. Comme précédemment on construit une suite définie par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}). \end{cases}$$

Quand "tout se passe bien", cette suite converge vers $\hat{x}$ vérifiant $\hat{x} = g(\hat{x})$.

Nous allons donner deux théorèmes principaux dont vous trouverez les démonstrations en document.

Théorème IV.3.1. *Soit g une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et un réel λ, $0 \leq \lambda < 1$, tels que pour tout z et tout y dans $\mathbb{R}^n$ on ait*

$$\|g(z) - g(y)\| \leq \lambda \|z - y\|. \tag{IV.3.1}$$

Alors il existe un $\hat{x}$ unique appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $\hat{x} = g(\hat{x})$ et la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \textit{ donné}, \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \end{cases},$$

converge vers $\hat{x}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition IV.3.2. *Soit g une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On appelle matrice jacobienne de g la matrice $Dg(x) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ définie par*

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

où $g_1, \dots, g_n$ désignent les composantes de g.

Définition IV.3.3. *La fonction g est différentiable en x si g admet des dérivées partielles en x et si la matrice jacobienne $Dg(x)$ vérifie*

$$g(y) = g(x) + Dg(x)(y-x) + \|y-x\|\varepsilon(y-x)$$

où $\varepsilon(y-x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui tend vers 0 quand y tend vers x.

Le théorème suivant dont la démonstration est délicate relie la convergence de la méthode de point fixe au rayon spectral de la matrice jacobienne :

Théorème IV.3.4. *Soit g une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui admet un point fixe $\hat{x}$, on suppose que g est différentiable en $\hat{x}$ et que $\rho[Dg(\hat{x})]$, le rayon spectral de la matrice jacobienne de g, vérifie $\rho[Dg(\hat{x})] < 1$. Alors il existe η tel que si x^0 vérifie $\|x^{(0)} - \hat{x}\| < \eta$, la suite définie par*

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

converge vers $\hat{x}$.

On pourrait montrer que la convergence obtenue est *linéaire*, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|x^{(k+1)} - \hat{x}\| \leq C\|x^{(k)} - \hat{x}\|.$$

On parle de convergence d'*ordre* n quand on a la majoration

$$\|x^{(k+1)} - \hat{x}\| \leq C\|x^{(k)} - \hat{x}\|^n.$$

IV.3.3 La méthode de Newton pour un système d'équations non-linéaires

Cours :
Newton/ Convergence
Newton/ Système 2 équations non-linéaires

On cherche à résoudre le système d'équations non-linéaires $f(x) = 0$. Comme pour le cas $n = 1$, l'idée de la méthode de Newton consiste à considérer l'approximation affine de f en $x^{(k)}$, soit

$$f(x^{(k)} + h) = f(x^{(k)}) + Df(x^{(k)})h + \|h\|\varepsilon(h),$$

si f est différentiable, où on a noté $Df(x)$ la matrice jacobienne de f. On détermine alors h tel que $f(x^{(k)}) + Df(x^{(k)})h = 0$, puis $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$.

La méthode de Newton pour résoudre le système d'équations non-linéaires $f(x) = 0$ est donnée par :

On se donne $x^{(0)}$ dans $\mathbb{R}^n$, puis pour $k \geq 0$

1. On résout le système linéaire $Df(x^{(k)})h = -f(x^{(k)})$.
2. On pose $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$.

C'est ce que l'on a vu dans le paragraphe référencé qui traite du cas particulier de deux équations non-linéaires.

Théorème IV.3.5. *Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. on cherche à résoudre $f(x) = 0$ par la méthode de Newton. S'il existe $\hat{x}$ tel que*

- *$f(\hat{x})$ est nul,*
- *f est différentiable dans un voisinage de $\hat{x}$ et $\|Df(x) - Df(\hat{x})\| \leq \alpha\|x - \hat{x}\|$,*

– *$Df(\hat{x})$ est inversible,*

alors il existe un réel strictement positif η tel que si $x^{(0)}$ vérifie $\|x^{(0)} - \hat{x}\| < \eta$ la suite construite par la méthode de Newton converge vers $\hat{x}$. De plus la convergence obtenue est d'ordre 2, ou quadratique*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|x^{(k+1)} - \hat{x}\| \leq C\|x^{(k)} - \hat{x}\|^2.$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat, qui est la "traduction" des hypothèses correspondantes dans le cas $n = 1$. On notera aussi que la convergence est très rapide (quadratique).

Documents du chapitre IV

Document IV.1 Les théorèmes de point fixe pour les systèmes non-linéaires

On sait définir la convergence d'une suite à l'aide de sa limite. Si l'on ne connaît pas cette limite, on peut montrer qu'une suite est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy, dont la définition suit.

Définition IV.3.6. *On dit que la suite $\{x^{(k)}\}$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall k \geq N(\varepsilon),\ \forall p \geq 0,\ \|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon,$$

Ceci nous permet d'énoncer quelques résultats sur les méthodes de point fixe.

Théorème IV.3.7. *Soit g une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et un réel λ, $0 \leq \lambda < 1$, tels que pour tout x et tout y dans $\mathbb{R}^n$ on ait*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|. \tag{IV.3.2}$$

Alors il existe un $\hat{x}$ unique appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $\hat{x} = g(\hat{x})$ et la suite $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x^{(0)} & \textit{donné} & \\ x^{(k+1)} & = & g(x^{(k)}) \end{array} \right.$$

converge vers $\hat{x}$.

Démonstration - On a

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \lambda \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \cdots \leq \lambda^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

On a d'autre part

$$x^{(k+p)} - x^{(k)} = x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} + x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} + \cdots + x^{(k+2)} - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| &\leq \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\| + \cdots + \|x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\| + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|, \\
&\leq (\lambda^{k+p-1} + \cdots + \lambda^{k+1} + \lambda^k)\|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \\
&\leq \lambda^k(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{p-1})\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \lambda^k \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \\
&\leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.
\end{aligned}$$

La quantité $\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\|$ tend donc vers zéro quand k tend vers l'infini ; ainsi la suite est une suite de Cauchy, de sorte qu'elle est convergente. On note $\hat{x}$ la limite de cette suite. On a

$$\|g(x^{(k)}) - g(\hat{x})\| \leq \|x^{(k)} - \hat{x}\|,$$

donc la limite de $g(x^{(k)})$ est $g(\hat{x})$. On a bien $g(\hat{x}) = \hat{x}$ car

$$\hat{x} = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) = g(\hat{x}).$$

La suite ainsi construite converge donc vers une solution de $g(x) = x$. Montrons que cette équation admet une solution unique : on suppose qu'il existe 2 solutions u et v, on a donc $u = g(u)$, $v = g(v)$, donc $g(u) - g(v) = u - v$. Or $\|g(u) - g(v)\| \leq \lambda\|u - v\|$, on a donc

$$\|u - v\| \leq \lambda\|u - v\|, \quad \text{soit} \quad \|u - v\|(1-\lambda) \leq 0$$

avec $\lambda < 1$. Ceci n'est possible que si $\|u - v\| = 0$ donc $u = v$. Ceci termine la démonstration du théorème .

Le théorème suivant dont la démonstration est délicate relie la convergence de la méthode de point fixe au rayon spectral de la matrice jacobienne :

Théorème IV.3.8. *Soit g une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui admet un point fixe $\hat{x}$, on suppose que g est différentiable en $\hat{x}$ et que $\rho[Dg(\hat{x})]$, le rayon spectral de la matrice jacobienne de g, vérifie $\rho[Dg(\hat{x})] < 1$. Alors il existe η tel que si x^0 vérifie $\|x^{(0)} - \hat{x}\| < \eta$, la suite définie par*

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

converge vers $\hat{x}$.

Démonstration - Grâce à des résultats sur les normes matricielles, on peut montrer que, si l'on note

$$\widehat{\varepsilon} = \frac{1 - \rho[Dg(\hat{x})]}{3} > 0,$$

il est possible de trouver une norme matricielle subordonnée telle que

$$0 \leq \|Dg(\hat{x})\| \leq \rho[Dg(\hat{x})] + \widehat{\varepsilon},$$

on utilisera donc dans la suite cette norme matricielle et la norme vectorielle correspondante.

En utilisant la définition de la différentiabilité on obtient donc :

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(\hat{x})\| &= \|Dg(\hat{x})(x-\hat{x}) + \|x-\hat{x}\|\varepsilon(x-\hat{x})\| \leq \|Dg(\hat{x})(x-\hat{x})\| + \|x-\hat{x}\|\|\varepsilon(x-\hat{x})\| \\ &\leq \|Dg(\hat{x})\|\|x-\hat{x}\| + \|x-\hat{x}\|\|\varepsilon(x-\hat{x})\| = \|x-\hat{x}\|(\|Dg(\hat{x})\| + \|\varepsilon(x-\hat{x})\|). \end{aligned}$$

Or $\|\varepsilon(x-\hat{x})\|$ tend vers 0 quand x tend vers $\hat{x}$, il existe donc η tel que

$$\|x - \hat{x}\| < \eta \Longrightarrow \|\varepsilon(x-\hat{x})\| \leq \widehat{\varepsilon}.$$

On obtient alors :

$$(\|Dg(\hat{x})\| + \|\varepsilon(x-\hat{x})\|) \leq \rho[Dg(\hat{x})] + \widehat{\varepsilon} + \widehat{\varepsilon} = \lambda.$$

Or $\lambda = \rho[Dg(\hat{x})] + 2\widehat{\varepsilon} = 1 - \widehat{\varepsilon} < 1$, on a donc démontré que :

$$\|x - \hat{x}\| < \eta \Longrightarrow \|g(x) - g(\hat{x})\| \leq \lambda\|x - \hat{x}\|,$$

avec $\lambda < 1$. La suite de la démonstration est analogue à ce qui se passe pour $n = 1$.

retour au cours

Exercices du chapitre IV

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.1

On rappelle que la définition du déterminant à partir des permutations est la suivante

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

où la somme est faite sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. En utilisant cette définition, montrer que si une matrice est inversible, il existe une permutation de ses lignes telle que tous les éléments de la diagonale de la matrice ainsi obtenue soient non nuls.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.2

Donner les matrices D, E et F correspondant à la décomposition $A = D-E-F$ de la méthode de Jacobi dans le cas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.3

Quelle est, pour la méthode de Gauss-Seidel, la forme de la matrice du système permettant de calculer $x^{(k+1)}$ à partir de $x^{(k)}$. Que pensez-vous de la résolution de ce système ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.4

Soit la décomposition $A = M - N$ avec M inversible et la méthode itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b. \end{cases}$$

Donner une condition suffisante sur les matrices M et N pour que la suite $x^{(k)}$ converge vers la solution de $Ax = b$.

retour au cours

Solution

Exercice IV.5

Montrer que pour la dichotomie, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision inférieure à ϵ est supérieur ou égal à $\log_2 \frac{b-a}{\epsilon}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.6

Pour calculer la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$, on résout $x^2 = a$. Il existe alors différentes manières de se ramener à une méthode de point fixe :

–
$$x = \frac{a}{x} \text{ donc } g_1(x) = \frac{a}{x},$$

–
$$2x = x + \frac{a}{x}, \text{ soit} x = 2x - \frac{a}{x} \text{ donc } g_2(x) = 2x - \frac{a}{x},$$

–
$$x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} \text{ donc } g_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}.$$

Tracer les fonctions $g_i(x)$ et la bissectrice pour $x > 0$. Prendre u_0 quelconque et construire graphiquement la suite $u_{k+1} = g_i(u_k)$ pour $k > 0$. Conclusion ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.7

Soit $g : [a, b] \to [a, b]$, continument dérivable, telle que $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in [a, b]$. On suppose que g admet deux points fixes dans $[a, b]$. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que l'on arrive à une contradiction.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.8

Pour calculer la racine x^* de $x^2 - 3x - 1 = 0$ sur $[-1, +1]$, on pose $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ pour appliquer une méthode de point fixe $x = g(x)$. Montrer que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $x_0 \in [-1, +1]$, converge vers un unique point fixe $x^* \in [-1, 1]$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.9

Soit une suite (x_n) convergeant vers x^*. On suppose que

$$\exists k < 1,\ |x_{i+1} - x_i| \leq k|x_i - x_{i-1}|\ \forall i \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que
$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|.$$
2. En déduire que, pour $p > n$,
$$|x_p - x_n| \leq (k^{p-1} + \ldots + k^n)|x_1 - x_0|.$$
3. Après avoir calculé la somme du membre de droite, faites tendre p vers l'infini pour obtenir
$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

retour au cours

Solution

Exercice IV.10

On reprend la fonction $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ dont l'unique point fixe x^* de $[-1, 1]$ est racine du trinôme $x^2-3x-1 = 0$. Soit $x_0 = 0$, calculer le nombre d'itérations de point fixe n nécessaires pour obtenir une précision inférieure à $\epsilon = 10^{-3}$ pour le calcul de x^*. Vérifier votre résultat en calculant les n premiers itérés de la méthode de point fixe.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.11

Soit la courbe $y = f(x)$. Ecrire l'équation de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $x = x_n$. Donner alors l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe Ox. Montrer que l'on retrouve ainsi l'itéré de la méthode de Newton. Pour illustrer graphiquement et numériquement cette méthode, tracer et calculer deux itérations avec $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 2$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.12

Soit la fonction $f(x) = \cos x - x$. Montrer qu'elle admet une racine sur $[0, \pi/2]$. Calculer trois itérations de la méthode de Newton en partant de $x_0 = \pi/4$ puis avec $x_0 = 0$.

retour au cours

Solution

Exercice IV.13

Écrire l'équation de la droite passant par les points $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. Donner l'abscisse x_{n+1} de l'intersection de cette droite avec l'axe Ox. Montrer que l'on retrouve l'équation de la sécante.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.14

Tracer une courbe convexe qui coupe l'axe Ox en un point x^*. Considérer deux points x_0 et x_1 qui entourent ce point. Effectuer alors graphiquement quelques itérations de la méthode de la sécante (modifiée) de telle sorte que la sécante passe toujours par deux points qui entourent x^*. Remarquez alors que soit x_0, soit x_1 est pris en compte dans toutes les itérations.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice IV.15

On considère les deux équations non-linéaires

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4, \quad x_1^2 - x_2 + 1 = 0.$$

Ecrire une étape de la méthode de Newton. Prenez un vecteur $x^{(0)}$ et calculez le vecteur $x^{(1)}$.

retour au cours

Solution

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de TD du chapitre 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1

On veut résoudre $Ax = b$.

Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel peuvent être généralisées en introduisant un paramètre réel strictement positif ω. Connaissant le vecteur $x^{(k)}$, on détermine les composantes du vecteur $x^{(k+1)}$, de la façon suivante, pour chaque i :

- on calcule $\widehat{x}_i^{(k+1)}$ à partir de l'une des deux méthodes, Jacobi ou Gauss-Seidel,
- on définit
$$x_i^{(k+1)} = \omega\widehat{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}.$$

On applique la méthode de relaxation à la méthode de Gauss Seidel.

1. Donner la relation matricielle liant $x^{(k+1)}$ et $x^{(k)}$. A chaque itération, quel est le système à résoudre ? Si on utilise les notations du cours que vaut M ? Que vaut N ?
2. Ecrire l'algorithme de la méthode de relaxation appliquée à la méthode de Gauss-Seidel.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'on ne peut rien conclure de façon générale sur la comparaison des deux méthodes itératives de Jacobi et Gauss Seidel. On veut résoudre $Ax = b$. La méthode de Jacobi peut s'écrire $x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + d$, la méthode de Gauss-Seidel peut s'écrire $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + e$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(R)$.

   Indication : $p_J(\lambda) = \lambda^3,\ p_R(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\rho(R) < 1 < \rho(J)$.

   Indication : $p_J(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda + 8,\ p_R(\lambda) = \lambda^3$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Exercice A.1.3

1. Soit A une matrice carrée, montrer que quel que soit la norme matricielle subordonnée on a toujours $\rho(A) \leq \|A\|$.
2. On pose $A = D - E - F$ (voir les notations du cours), on suppose que D est inversible. Montrer que

$$\lambda \neq 0 \text{ est valeur propre de } (D-E)^{-1}F \Leftrightarrow 1 \text{ est valeur propre de } D^{-1}\left(\frac{F}{\lambda} + E\right).$$

3. Utiliser les deux questions précédentes pour montrer que :

$$1 \leq \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|\lambda|} \right) \right).$$

4. Montrer que si A est à diagonale strictement dominante la méthode de Gauss Seidel converge.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

Etant donné $a > 0$ et $p \in \mathbb{N},\ p > 1$ on cherche à déterminer $x^* \in \mathbb{R}$ solution de :

$$x^p = a. \tag{A.1.1}$$

1. On prend dans un premier temps $p = 2$. Détailler l'application de la méthode de Newton à la résolution de (A.1.1) et montrer graphiquement que cette méthode converge.
2. On prend p quelconque et on se propose d'utiliser une méthode de point fixe en écrivant (A.1.1) sous la forme $x = g(x)$, avec $g(x) = a\,x^{1-p}$. Montrer que l'algorithme $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ peut ne pas converger dès que $p \geq 2$.
3. On utilise la méthode de Newton pour résoudre (A.1.1). Montrer que cette méthode peut s'écrire $x_{n+1} = h(x_n)$. Que vaut $h'(x^*)$? Utiliser quelques itérations de cette méthode pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ (on prendra $x^{(0)} = 1,5$).

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5

On désire approcher dans $\mathbb{C}$ les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire trouver $z = x_1 + ix_2$ tel que

$$z^3 = 1.$$

1. Mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$, où $x \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
2. On résout par l'algorithme de Newton, calculer $x^{(1)}$ pour $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice IV.1

La définition du déterminant à partir des permutations donne

$$\det A = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

où la somme porte sur toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Or si la matrice est inversible, son déterminant est non nul et il existe donc au moins un élément de cette somme qui est non nul, cet élément correspond à une permutation $\hat{\sigma}$. On a donc

$$a_{\hat{\sigma}(1)1} a_{\hat{\sigma}(2)2} \ldots a_{\hat{\sigma}(n)n} \neq 0,$$

donc $\forall i = 1, ..., n \; a_{\hat{\sigma}(i)i} \neq 0$. Si on permute les lignes de A et que l'on note $\widehat{A}$ la matrice définie par $\widehat{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{\hat{\sigma}(1)} \\ \underline{A}_{\hat{\sigma}(2)} \\ \vdots \underline{A}_{\hat{\sigma}(n)} \end{pmatrix}$, les termes diagonaux de $\widehat{A}$ qui sont $a_{\hat{\sigma}(1)1}, a_{\hat{\sigma}(2)2}, \ldots, a_{\hat{\sigma}(n)n}$ sont tous non nuls.

Il suffit alors de permuter les lignes de la matrice A suivant la permutation $\hat{\sigma}$ pour obtenir le résultat attendu.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.3

La matrice $D - E$ est triangulaire inférieure. Le nombre de multiplications/divisions est de l'ordre de n^2 pour la résolution d'un système triangulaire, ce qui est beaucoup moins important que les n^3 de la méthode LU. Par contre, la diagonale de A ne doit pas comporter d'éléments nuls.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.4

On a donc $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$, donc en reprenant les notations du paragraphe Convergence des méthodes itératives , on a $C = M^{-1}N$ et $d = M^{-1}b$. On utilise la proposition IV.1.1. Si $||M^{-1}N|| < 1$, alors la suite $x^{(k)}$ converge vers la solution unique de

$$(I - M^{-1}N)x = d \Leftrightarrow x - M^{-1}Nx = M^{-1}b \Leftrightarrow (M - N)x = b \Leftrightarrow Ax = b.$$

On remarque au passage que si M inversible, si $||M^{-1}N|| < 1$, alors la matrice $A = M - N$ est inversible, en effet il sufffit de reprendre la proposition IV.1.1, $A = M(I - M^{-1}N)$ est un produit de matrices inversibles.

Retour à l'exercice ▲

La méthode de la dichotomie est basée sur le fait que la solution x^* de $f(x) = 0$ recherchée appartient à une suite de segments emboités $[a_k, b_k]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Or la longueur de ces segments est donnée par

$$l_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Ceci implique que

$$x^* - a_k \leq l_k.$$

Pour que a_n soit une approximation de x^* avec un précision inférieure à ε, il suffit que

$$l_n \leq \varepsilon$$

soit

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \leq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Retour à l'exercice ▲

Vous pouvez vous aider de SCILAB pour tracer graphiquement la courbe $g(x)$, la bissectrice et les points $(u_k, g(u_k))$.

– Voir sur la figure A.1.1 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_1

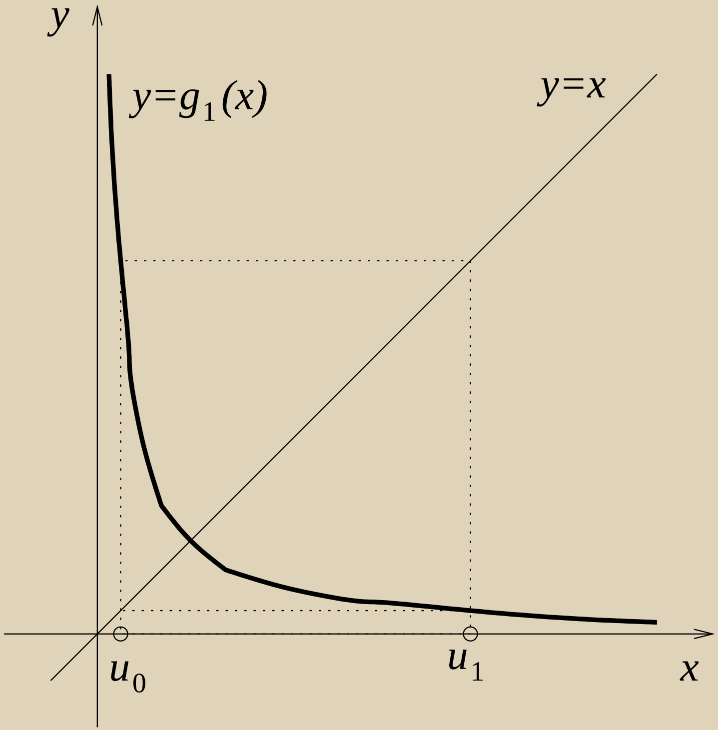

FIG. A.1.1: Point fixe 1

Il est facile de calculer dans le cas de g_1 la suite des itérés. En effet

$$u_0 \text{ donné },\ u_1 = \frac{a}{u_0},\ u_{2n} = u_0\ \ u_{2n+1} = u_1\ , n = 1, 2, \ldots$$

La suite prend successivement les valeurs u_0 et u_1 et ne converge donc pas (sauf si par hasard $u_0 = \sqrt{a}$!).

– Voir sur la figure A.1.2 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_2
  Le tracé que vous avez effectué pour g_2 vous montre que la suite u_k diverge.
– Voir sur la figure A.1.3 un exemple de ce qui vous pourriez obtenir pour g_3
  Le tracé que vous avez effectué pour g_3 vous montre que la suite u_k se rapproche de la solution. Après avoir étudié les théorèmes sur la convergence d'une telle suite, vous pourrez démontrer qu'elle converge.

Retour à l'exercice ▲

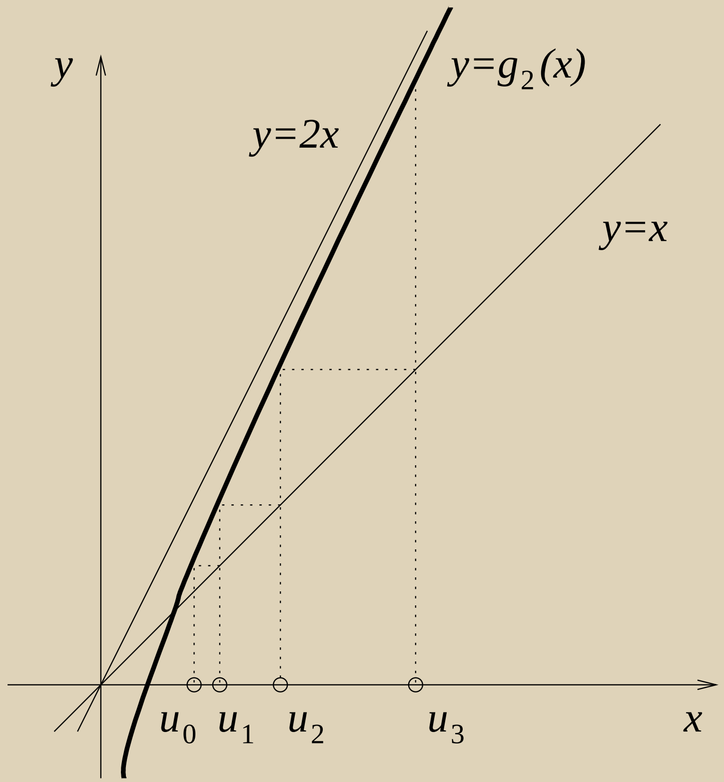

FIG. A.1.2: Point fixe 2

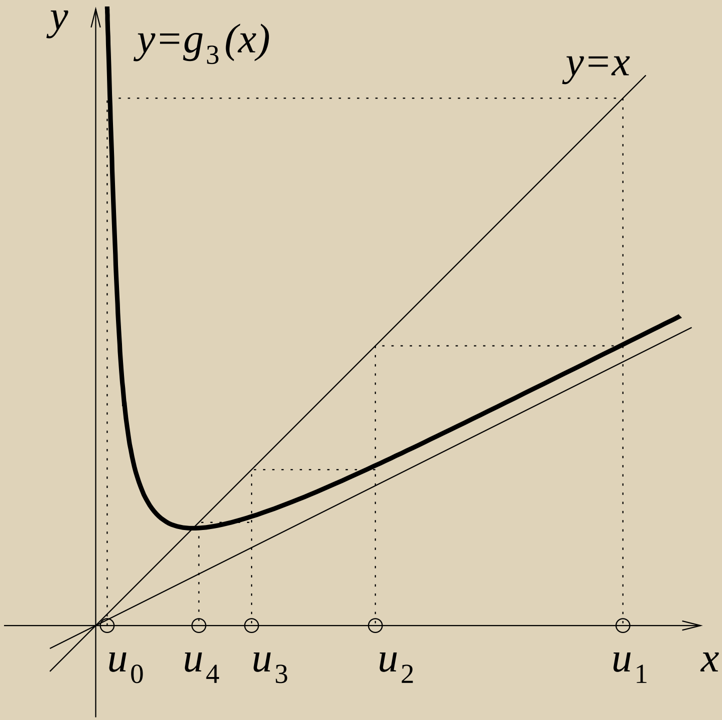

FIG. A.1.3: Point fixe 3

Solution de l'exercice IV.7

Le raisonnement se fait par l'absurde en supposant qu'il existe deux points fixes distincts x^* et $\hat{x}$ distincts dans $[a, b]$. Alors, le théorème des accroissements finis donne

$$g(x^*) - g(\hat{x}) = (x^* - \hat{x})g'(\xi),$$

où ξ est compris entre x^* et $\hat{x}$ et donc appartient à $[a, b]$. Alors

$$|x^* - \hat{x}| = |g(x^*) - g(\hat{x})| = |x^* - \hat{x}|\,|g'(\xi)| \leq k|x^* - \hat{x}| < |x^* - \hat{x}|$$

ce qui est absurde !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.8

Pour appliquer la proposition il suffit de démontrer que l'application g va de $[-1,1]$ dans lui-même et que sa dérivée est bornée par une constante strictement inférieure à 1 sur cet intervalle. Faites un tableau de variation de la fonction g sur $[-1,1]$ et vous démontrerez la première partie sans problème. Quant à la dérivée $g'(x) = \frac{2}{3}x \ldots$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.9

1. L'inégalité de démontre facilement en utilisant l'inégalité de l'hypothèse pour $i = n, n-1, ..., 0$.
2. On écrit
$$x_p - x_n = x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - \ldots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n$$
on prend les valeurs absolues, on utilise l'inégalité triangulaire, puis la majoration précédente.
3. On a
$$k^{p-1} + \ldots + k^{n+1} + k^n = k^n(k^{p-1-n} + \ldots + k + 1) = k^n \frac{1 - k^{p-n}}{1-k}$$
ce qui donne
$$|x_p - x_n| \leq k^n \frac{1 - k^{p-n}}{1-k} |x_1 - x_0| .$$
On passe alors à la limite quand p tend vers $+\infty$ sur les deux membres de l'inégalité (le passage à la limite conserve l'inégalité). Alors, puisque $k < 1$
$$\lim_{p \to +\infty} k^{p-n} = 0$$
et, par hypothèse, $\lim_{p \to +\infty} x_p = x^*$, ce qui donne le résultat.

Retour à l'exercice ▲

On utilise les résultats des exercices IV.8 et IV.9 , ce qui donne

$$|x^* - x_n| \leq k^n \frac{1}{1-k} |x_1 - x_0|, \text{ avec } k = \frac{2}{3}.$$

On obtient donc

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ k^n \frac{1}{1-k} |x_1 - x_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^n,\ |x^* - x_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Il suffit donc d'avoir

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \epsilon \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln \epsilon \Leftrightarrow n \geq 18.$$

Retour à l'exercice ▲

L'équation de la droite tangente est évidemment

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

L'abscisse x_{n+1} de l'intersection de la droite tangente avec l'axe Ox est donné par

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$

ce qui permet de retrouver la formule de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Le calcul de x_1 et x_2 donne

$$x_1 = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}\,,\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{17}{12}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.12

Puisque $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$ la fonction f admet au moins une racine sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En calculant on obtient

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0.7504,\ x_3 = 0.7391$$

puis

$$x_0 = \frac{\pi}{4},\ x_1 = 0.7395,\ x_2 = 0.7391,\ x_3 = 0.7391$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.13

L'équation de la droite (pour ceux qui auraient un trou de mémoire) est donnée par

$$\frac{y - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \Leftrightarrow y = f(x_n) + (x - x_n)\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de cette droite avec l'axe Ox, on a donc

$$y = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

On retrouve la formule de la sécante.

Retour à l'exercice ▲

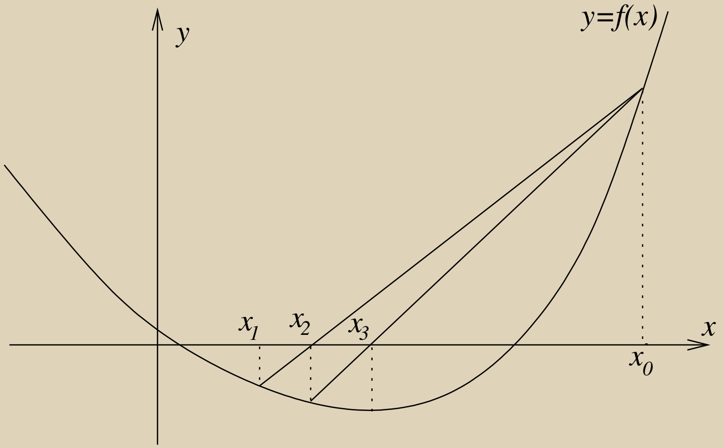

FIG. A.1.4: Méthode de la sécante modifiée

Comme on le voit sur la figure A.1.4, la suite construite par la méthode de la sécante modifiée est obtenue successivement avec les couples x_0, x_1 puis x_2, x_0 puis x_3, x_0, chacun des couples encadre la racine.

Par la méthode de la sécante simple, à partir de x_0, x_1 on aurait construit x_2, (le même !) puis à partir de x_1, x_2 on aurait construit un x_3' qui n'est pas x_3.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice IV.15

Donnons d'abord la fonction f et sa matrice jacobienne

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + (x_2^2 - 1)^2 - 4 \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 \end{pmatrix} \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2(x_2 - 1) \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

Alors on peut calculer $x^{(1)}$ en fonction de $x^{(0)}$ de la manière suivante :

$$\left(Df\left(x^{(0)}\right)\right) h = -f\left(x^{(0)}\right),\ x^{(1)} = x^{(0)} + h$$

Par exemple, si on choisit

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{on calcule } Df\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ f\left(x^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis après résolution

$$h = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4 \end{pmatrix},\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5 \end{pmatrix},\ Df\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ f\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 18.25 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

Après quelques itérations on obtient la solution $x = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.56 \end{pmatrix}$.

Retour à l'exercice ▲

On doit résoudre

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

avec

$$M = \frac{1}{\omega}D - E, \quad N = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + F,$$

on vérifie bien que $M - N = D - E - F = A$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.1

A, b , x_0, N, ϵ donnés

$n =$ nombre de lignes de la matrice A
pour $i = 1$ jusqu'à n faire
si $|a_{ii}| < \epsilon$ alors
arrêter l'algorithme et écrire un message d'erreur
fin si
fin pour
pour $k = 1$ jusqu'à N faire
pour $i = 1$ jusqu'à n faire

$$x_1(i) \longleftarrow \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_1(j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_0(j));$$

$\mathbf{x_1}(\mathbf{i}) \longleftarrow \omega\, \mathbf{x_1}(\mathbf{i}) + (\mathbf{1} - \omega)\, \mathbf{x_0}(\mathbf{i}); \longrightarrow$ variante sur la méthode de relaxation
fin pour
si $\dfrac{||x_1 - x_0||}{||x_1||} \leq \epsilon$
arrêter et écrire que x_1 est la solution et retourner
sinon
$x_0 = x_1;$
fin si
fin pour
arrêt avec un message indiquant la non-convergence

Remarque :

Au niveau pratique, on ne stocke que 2 vecteurs (x_0 et x_1) c'est-à-dire $x^{(k)}$ et $x^{(k+1)}$, nécessaires pour calculer l'erreur relative.
On écrase l'ancien vecteur par le nouveau petit à petit.

Retour à l'exercice ▲

$\rho(J) = 0$, donc la méthode de Jacobi converge pour cette matrice.

R admet 0, λ_1 et λ_2 comme valeurs propres.

Les coefficients du polynôme caractéristique permettent de voir que $\lambda_1\lambda_2 = -4$, donc forcément une des deux valeurs propres est plus grande que 1 en module (sinon le produit serait inférieur à 1 en module).

Donc $\rho(R) > 1$, donc la méthode de Gauss-Seidel diverge pour cette matrice.

Retour à l'exercice ▲

$\rho(R) = 0$, donc la méthode de Gauss-Seidel converge pour cette matrice.

Les coefficients du polynôme caractéristique permettent de voir que le produit des trois valeurs propres de J vaut -8, donc forcément une des trois valeurs propres est plus grande que 1 en module (sinon le produit serait inférieur à 1 en module).

Donc $\rho(J) > 1$, donc la méthode de Jacobi diverge pour cette matrice.

Retour à l'exercice ▲

Revoyez la définition d'une norme subordonnée.

Retour à l'exercice ▲

D'après la définition, on a donc pour tous les x non nuls appartenant à $\mathbb{C}^n$

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Faites le bon choix pour x.

Retour à l'exercice ▲

Si l'on note λ^* la plus grande valeur propre en module de A, si on note x^* un vecteur propre associé, on a donc

$$Ax^* = \lambda^* x^* \Rightarrow \|Ax^*\| = |\lambda^*|\|x^*\| = \rho(A)\|x^*\|.$$

donc

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax^*\|}{\|x^*\|} = \rho(A).$$

Retour à l'exercice ▲

On suppose que $\lambda \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } (D-E)^{-1}F &\Leftrightarrow \exists y \neq 0,\ \ (D-E)^{-1}Fy = \lambda y \\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0,\ \ Fy = \lambda(D-E)y \\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0,\ \ (F+\lambda E)y = \lambda D y \\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0,\ \ \frac{1}{\lambda}(F+\lambda E)y = Dy \\
&\Leftrightarrow \exists y \neq 0,\ \ D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F + E\right) y = y \\
&\Leftrightarrow 1 \text{ valeur propre de } D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F + E\right)
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Puisque 1 est valeur propre de $D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F+E\right)$, on a donc

$$\rho\left(D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F+E\right)\right)\geq 1,$$

donc

$$\left\|D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F+E\right)\right\|_\infty\geq 1,$$

or

$$\left\|D^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}F+E\right)\right\|_\infty=\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|\lambda|}.$$

Retour à l'exercice ▲

On va montrer que si la méthode de Gauss-Seidel diverge, alors la matrice A n'est pas à diagonale strictement dominante.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.1.3

Si la méthode de Gauss-Seidel diverge que peut-on dire du rayon spectral de $(D - E)^{-1}F$?

Retour à l'exercice ▲

Si la méthode de Gauss-Seidel diverge, le rayon spectral de $(D-E)^{-1}F$ est supérieur ou égal à 1, donc il existe une valeur propre λ de $(D-E)^{-1}F$ supérieure ou égale à 1, pour cette valeur propre, en appliquant la question précédente, on a

$$1 \leq \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|\lambda|} \right) \right) \leq \max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right) \right).$$

Ce qui prouve que la matrice A n'est pas à diagonale strictement dominante.

Donc par contraposée : si la matrice A est à diagonale strictement dominante, la méthode de Gauss-Seidel converge.

Retour à l'exercice ▲

Tracer la courbe $x^2 = a$, tracez les tangentes et constatez graphiquement que la méthode de Newton converge.

Retour à l'exercice ▲

On calcule

$$g'(x^*) = \frac{(1-p)a}{(x^*)^p} = 1 - p,$$

or la proposition IV.2.3 permet de conclure quant à la convergence pour $g'(x^*) < 1$, bien sûr cette proposition donne seulement une condition suffisante de convergence, mais pour $p \geq 2$, cette condition suffisante n'est pas vérifiée, donc la méthode de point fixe peut ne pas converger.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.4

On a

$$h(x) = x - \frac{x^p - a}{p x^{p-1}} = x(1 - \frac{1}{p}) + \frac{a}{p x^{p-1}}.$$

On obtient, comme pour toute méthode de Newton, $h'(x^*) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

Pour $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, après 7 itérations on obtiendrait $\begin{pmatrix} 1 \\ -2.5610^{-8} \end{pmatrix}$

Pour $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, après 5 itérations on obtiendrait $\begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.8660254 \end{pmatrix}$

Pour $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient $x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$, après 5 itérations on obtiendrait $\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.8660254 \end{pmatrix}$

On rappelle que les racines de l'unité sont $1, j, j^2$, ce sont les valeurs obtenues numériquement.

Retour à l'exercice ▲