MT09-Analyse numérique élémentaire

Chapitre 5 : Interpolation

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Juin 2007

Chapitre V
Interpolation

V.1 Motivations

V.1.1 Approximation d'une fonction

Exercices :
Exercice V.1

Dans la résolution de certains problèmes numériques on rencontre la situation suivante : on veut calculer les valeurs d'une fonction $f(t)$ pour un très grand nombre de valeurs de t, mais on ne connaît pas f "explicitement". Ceci se produit lorsque :

– f n'est connue qu'en certains points expérimentaux $t_0, t_1, \ldots, t_n$,
– ou lorsque la fonction f est évaluée *numériquement* par un code de calcul dont l'exécution est coûteuse.

On veut alors "représenter" f par une fonction simple dont l'évaluation est aisée.

Autrement dit, il s'agit d'approcher la fonction f par une autre fonction, plus facile à calculer. Cette fonction approchée $\tilde{f}$ est choisie dans une classe $\tilde{F}$ de fonctions dont le calcul n'est pas trop coûteux. Citons l'ensemble des polynômes, l'ensemble des fractions rationnelles, l'ensemble des polynômes trigonométriques,...

La question est alors de savoir en quel sens on désire approcher f. Il y a un grand nombre de possibilités. Citons les plus courantes.

– On peut chercher une fonction $\tilde{f} \in \tilde{F}$ telle que :

$$\forall i = 0, 1, \ldots, n, \qquad \tilde{f}(t_i) = f(t_i).$$

C'est la technique de l'**interpolation**.

– On peut chercher une fonction $\tilde{f} \in \tilde{F}$ qui minimise l'écart entre les deux courbes aux points d'abscisse t_i $(0 \le i \le n)$:

$$\sum_{i=0}^{n} (\tilde{f}(t_i) - f(t_i))^2 = \min_{g \in \tilde{F}} \sum_{i=0}^{n} (g(t_i) - f(t_i))^2.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

C'est la technique de la minimisation au sens des **moindres carrés** qui est étudiée dans un autre chapitre.

– On peut chercher une fonction $\tilde{f} \in \tilde{F}$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 \, dx = \min_{g \in \tilde{F}} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

C'est la technique de l'**approximation quadratique**.

– Enfin, on peut chercher une fonction $\tilde{f} \in \tilde{F}$ telle que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \tilde{f}(x)| = \min_{g \in \tilde{F}} \left(\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \right).$$

C'est la technique de l'**approximation uniforme**.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne traitons que de l'interpolation.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.1.2 Interpolation

Exercices :
Exercice V.2

Dans tout ce qui suit on suppose données deux familles de $n+1$ réels :

- les abscisses : $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, supposées **toutes distinctes**,
- les ordonnées correspondantes : $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$. Ces valeurs peuvent, par exemple, être les $\{f(t_i)\}$, où f est la fonction que l'on cherche à représenter.

On cherche alors une fonction h qui prend pour valeur y_i en chaque point t_i, ceci pour $i = 0, \ldots, n$. Évidemment ce problème admet une infinité de solutions. Il faut donc préciser la classe $\tilde{F}$ de fonctions dans laquelle on va chercher h.

Dans ce qui suit nous allons considérer deux classes particulières de fonctions :

- l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré au plus n,
- l'ensemble des splines cubiques qui sont des fonctions définies comme des "polynômes par morceaux", chacun des polynômes étant de degré 3.

Il existe également d'autres méthodes d'interpolation. Citons celles qui utilisent des informations sur les dérivées de f aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$. C'est l'**interpolation d'Hermite**, que nous ne verrons pas ici. Contentons-nous d'en donner un exemple très simple. Supposons connues les valeurs de f et de ses dérivées jusqu'à l'ordre n en un point t_0. Alors, l'unique polynôme P_n de degré n vérifiant

$$\forall i = 0, 1, \ldots, n, \qquad P_n^{(i)}(t_0) = f^{(i)}(t_0),$$

est donné par

$$P_n(t) = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ce polynôme n'est rien d'autre en fait que la partie polynomiale du développement de Taylor de f à l'ordre n au point $t = t_0$.

V.2 Interpolation polynomiale

V.2.1 Polynôme d'interpolation dans la base de *Lagrange*

Exercices :
Exercice V.3

Exemples :
Exemple V.1

Théorème V.2.1. *Étant donnés $n+1$ nombres réels $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ distincts et $n+1$ nombres réels $(y_0, y_1, \dots, y_n)$, il existe un polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ (ensemble des polynômes de degré $\leq n$) et un seul tel que*

$$\forall i = 0, 1, \dots, n, \qquad p_n(t_i) = y_i. \tag{V.2.1}$$

Démonstration -

1. L'existence est démontrée directement en exhibant le polynôme cherché, soit

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathcal{L}_i(t) \tag{V.2.2}$$

   où les polynômes $\mathcal{L}_i$ sont les polynômes de base de **Lagrange** qui prennent la forme

$$\mathcal{L}_i(t) = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}. \tag{V.2.3}$$

   Ces polynômes sont appelés polynômes de base, parce qu'ils engendrent l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. En outre, on les introduit plutôt que d'utiliser la base canonique $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$, parce qu'ils permettent d'exprimer immédiatement tout polynôme de degré inférieur ou égal à n en fonction de ses valeurs aux points t_i. On vérifie

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

bien en effet que, par construction même de $\mathcal{L}_i(t)$:

$$\mathcal{L}_i(t_j) = \begin{cases} 1, & \text{pour } j = i, \\ 0, & \text{pour } j \neq i. \end{cases}$$

2. L'unicité se montre de la façon suivante : supposons qu'il existe deux polynômes p_n et q_n appartenant à $\mathcal{P}_n$ tels que $p_n(t_i) = q_n(t_i) = y_i$. Alors si on pose $d_n = p_n - q_n$, d_n appartient à $\mathcal{P}_n$ et $d_n(t_i) = 0,\ i = 0, ..., n$. Autrement dit, le polynôme d_n a au moins $n+1$ racines distinctes. Il est de degré inférieur ou égal à n. Il est donc identiquement nul et l'on a ainsi $p_n = q_n$.

V.2.2 Calcul de l'interpolation

Exercices :
Exercice V.4

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. On construit le polynôme $p_n(t)$ qui interpole les valeurs de f aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ($t_i \in [a, b]$), ce qui conduit à poser $p_n(t_i) = f(t_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. On a ainsi approché la fonction f par le polynôme p_n. La question est alors la suivante : quelle erreur commet-on quand on approche f par p_n ?

Hypothèses et notations. Dans ce qui suit nous supposerons que f est $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et nous noterons $e_n(t)$ l'erreur d'interpolation définie par :

$$e_n(t) = f(t) - p_n(t).$$

Soient alors $\mathrm{Int}(t, t_0, \ldots, t_n)$ le plus petit intervalle fermé contenant les points $t, t_0, \ldots, t_n$ et $\pi_n(t)$ la fonction définie par :

$$\pi_n(t) = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n).$$

Théorème V.2.2. *Quel que soit $t \in [a, b]$, il existe $\xi_t \in Int(t, t_0, \ldots, t_n)$, dépendant de t, tel que*

$$e_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_t)\pi_n(t). \tag{V.2.4}$$

Démonstration

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarquons tout d'abord que cette expression de l'erreur n'a de sens que si la fonction f que l'on interpole est $n+1$ fois continûment dérivable. Si ce n'est pas le cas, l'expression précédente de l'erreur n'est plus définie. On peut d'ailleurs vérifier expérimentalement dans ce cas qu'il ne sert à rien d'interpoler f par un polynôme de degré n. C'est une règle générale en analyse numérique : il est inutile d'utiliser des méthodes d'ordre élevé, construites pour des fonctions régulières, lorsque la fonction à approcher n'a pas la régularité requise.

Remarquons aussi que l'expression de l'erreur obtenue dans le théorème ci-dessus est ce qu'on appelle une **estimation d'erreur**. Elle est précieuse en ce qu'elle donne la forme de l'erreur et montre comment varie (au ξ près) cette erreur quand on augmente le nombre de points d'interpolation. Par contre, elle ne permet pas de calculer la valeur de l'erreur $e(t)$ en un point t donné. En effet, le point ξ est inconnu (on sait seulement qu'il existe) et pire encore, on ne sait pas en général calculer la dérivée $(n+1)$-ème de f. En effet, si l'on approche f c'est que l'on ne sait pas la calculer ou au moins que son calcul coûte très cher. Ceci exclut en général toute possibilité de calcul de $f^{(n+1)}$ à un coût abordable.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.3 Polynôme d'interpolation dans la base de *Newton*

Exercices :
Exercice V.5
Exercice V.6

Nous avons introduit une nouvelle base de l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n : la base de Lagrange. Cela nous a permis de démontrer l'existence d'un polynôme d'interpolation en donnant ses composantes dans cette base. Par contre, la base de Lagrange est très malcommode pour calculer les valeurs du polynôme d'interpolation en un ou plusieurs points. La base canonique n'étant pas plus adaptée, nous allons introduire une troisième base. Étant donnés $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$, la ***base de Newton*** est définie par :

$$\{\ 1\ ,\ (t-t_0)\ ,\ (t-t_0)(t-t_1)\ ,\ \ldots\ ,\ (t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{n-1})\ \}, \tag{V.2.5}$$

Nous allons montrer comment calculer les coefficients du polynôme de degré inférieur ou égal à n, p_n, interpolant une fonction f en les points $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Ce polynôme s'écrit :

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t-t_0) + \cdots + c_n(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{n-1}).$$

Notons que le coefficient c_n est le coefficient de t^n dans p_n. C'est ce qu'on appelle le *coefficient directeur* de p_n.

Un des avantages de l'expression du polynôme p_n exprimé dans la base de Newton est le suivant : si on note p_k les polynômes tronqués, c'est-à-dire :

$$p_k(t) = c_0 + c_1(t-t_0) + \cdots + c_k(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1}), k = 0, ..., n,$$

alors p_k est le polynôme de degré inférieur ou égal à k qui interpole f aux points $t_0, ..., t_k$, en effet on a

$$p_n(t) = p_k(t) + c_{k+1}(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_k) + \cdots + c_n(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{n-1}).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

donc $p_k(t_0) = p_n(t_0) = f(t_0)$, $p_k(t_1) = p_n(t_1) = f(t_1)$,..., $p_k(t_k) = p_n(t_k) = f(t_k)$.

On a donc en particulier :

$$p_n(t) = p_{n-1}(t) + c_n(t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{n-1}),$$

donc si on connaît le polynôme p_{n-1} et que l'on rajoute un point d'interpolation t_n, les coefficients $c_0, .., c_{n-1}$ sont les mêmes, il suffit de calculer le coefficient c_n et de rajouter au polynôme p_{n-1} le terme $c_n(t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{n-1})$.

V.2.4 Différences divisées

Exercices : Exercice V.7 Exercice V.8

Documents : Document V.2

Définition V.2.3. *Soit une fonction f dont on connaît les valeurs en des points distincts t_0, t_1, t_2, ... On appelle* ***différence divisée d'ordre*** $0, 1, 2, \ldots, n$ *les expressions suivantes définies itérativement par :*

$$\begin{aligned}
&f[t_0] = f(t_0),\ f[t_1] = f(t_1),\ f[t_2] = f(t_2)\\
&f[t_0, t_1] = \frac{f[t_0] - f[t_1]}{t_0 - t_1},\ f[t_1, t_2] = \frac{f[t_1] - f[t_2]}{t_1 - t_2}\\
&f[t_0, t_1, t_2] = \frac{f[t_0, t_1] - f[t_1, t_2]}{t_0 - t_2}.
\end{aligned}$$

D'une manière générale, si X est un ensemble fini de points distincts si $a \notin X$ et $b \notin X$, si $a \neq b$ alors

$$f[a, X, b] = \frac{f[a, X] - f[X, b]}{a - b}.$$

Théorème V.2.4. *Soit une fonction f dont on connaît les valeurs en $n+1$ points distincts t_i ($0 \leq i \leq n$) et soit p_n le polynôme d'interpolation :*

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + c_n(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_{n-1}).$$

$$\forall k = 0, \ldots, n, \quad f[t_0, t_1, \ldots, t_k] = c_k \tag{V.2.6}$$

et

$$e_n(t) = f[t_0, t_1, \ldots, t_n, t](t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_n). \tag{V.2.7}$$

Démonstration - Elle se fait par récurrence sur le nombre de points d'interpolation.

– Si $n = 0$, p_0 est le polynôme constant qui interpole f en t_0, donc

$$p_0(t) = f(t_0) = f[t_0].$$

– Si $n = 1$, p_1 est le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui interpole f en t_0, t_1, on écrit $p_1(t) = c_0 + c_1(t - t_0), p_1(t_0) = f(t_0), p_1(t_1) = f(t_1)$ et on obtient

$$c_0 = f(t_0) = f[t_0], c_1 = \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1} = f[t_0, t_1].$$

– Supposons que la formule soit exacte pour les polynômes qui interpolent en $k + 1$ points, on a par exemple p_k le polynôme de degré inférieur ou égal à k qui interpole f en $t_0, ..., t_k$ qui s'écrit :

$$p_k(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + ... + f[t_0, ..., t_k](t - t_0)(t - t_1)...(t - t_{k-1}).$$

De même q_k le polynôme de degré inférieur ou égal à k qui interpole f en $t_1, ..., t_{k+1}$ s'écrit :

$$q_k(t) = f[t_1] + f[t_1, t_2](t - t_1) + ... + f[t_1, ..., t_{k+1}](t - t_1)(t - t_2)...(t - t_k).$$

Si on définit le polynôme p par :

$$p(t) = \frac{(t - t_{k+1})p_k(t) - (t - t_0)q_k(t)}{t_0 - t_{k+1}},$$

alors $p = p_{k+1}$, en effet p est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k + 1$ et de plus il interpole f aux points t_0, t_1, t_{k+1}, en effet :

$$p(t_0) = p_k(t_0) = f(t_0), p(t_{k+1}) = q_k(t_{k+1}) = f(t_{k+1}),$$

pour $i = 1, ..., k$,

$$p(t_i) = \frac{(t_i - t_{k+1})p_k(t_i) - (t_i - t_0)q_k(t_i)}{t_0 - t_{k+1}} = \frac{(t_i - t_{k+1}) - (t_i - t_0)}{t_0 - t_{k+1}} f(t_i) = f(t_i).$$

Le coefficient directeur de p_k, c'est-à-dire le coefficient de t^k est $f[t_0, ..., t_k]$, le coefficient directeur de q_k, c'est-à-dire le coefficient de t^k est $f[t_1, ..., t_{k+1}]$, donc le coefficient directeur de p_{k+1}, c'est-à-dire le coefficient de t^{k+1} est

$$c_{k+1} = \frac{f[t_0, ..., t_k] - f[t_1, ..., t_{k+1}]}{t_0 - t_{k+1}} = f[t_0, ..., t_{k+1}]$$

On sait d'autre part que

$$p_{k+1}(t) = p_k(t) + c_{k+1}(t - t_0)(t - t_1)...(t - t_k)$$

On a donc

$$p_{k+1}(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + ... + f[t_0, ..., t_{k+1}](t - t_0)(t - t_1)...(t - tk).$$

Ce qui termine la démonstration.

Quant au calcul de l'erreur, il est détaillé dans l'exercice (V.7). □

On pourra voir dans le document le calcul des différences divisées lorsque les points sont équidistants.

Proposition V.2.1. *Les différences divisées $f[t_0, t_1, \ldots, t_k]$ sont des fonctions symétriques de leurs arguments.*

Démonstration - Le nombre $f[t_0, t_1, \ldots, t_k] = c_k$ est le coefficient du terme en t^k dans le polynôme de degré inférieur ou égal à k qui interpole f aux points $\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$. Or ce polynôme est unique et ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a numéroté les points, de sorte que :

$$f[t_{\sigma(0)}, t_{\sigma(1)}), \ldots, t_{\sigma(k)}] = f[t_0, t_1, \ldots, t_k],$$

pour toute permutation σ des entiers $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.5 Calcul pratique des différences divisées

Exercices :
Exercice V.9
Exercice V.10

Rappelons l'expression des différences divisées données dans la définition V.2.3 :

$$f[t_i] = f(t_i),\ f[t_0, t_1, \dots, t_k] = \frac{f[t_0, t_1, \dots, t_{k-1}] - f[t_1, t_2, \dots, t_k]}{t_0 - t_k}.$$

L'utilisation de cette formule permet de calculer les $f[t_0, t_1, \dots, t_k]$ de proche en proche à l'aide du tableau suivant (chaque colonne se déduit de la colonne précédente) :

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$\dots$	$k = n$
$f[t_0]$				
$f[t_1]$	$f[t_0, t_1]$			
$f[t_2]$	$f[t_1, t_2]$	$f[t_0, t_1, t_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$f[t_n]$	$f[t_{n-1}, t_n]$	$f[t_{n-2}, t_{n-1}, t_n]$	$\dots$	$f[t_0, t_1, \dots, t_n]$

- Nous voyons que la détermination des coefficients c_k nécessite $\dfrac{n(n+1)}{2}$ divisions.
- Nous voyons aussi que nous obtenons sur la diagonale du tableau les coefficients $f[t_0]$, $f[t_0, t_1]$, $f[t_0, t_1, t_2]$, et finalement $f[t_0, t_1, \dots, t_n]$, c'est-à-dire les coefficients c_0, c_1, c_2 et finalement c_n de p_n dans la base de Newton.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Voici un algorithme succinct pour calculer les différences divisées d_i $(0 \leq i \leq n)$:

pour $i = 0$ jusqu'à n **faire**
    $d_i = f(t_i)$
fin pour
pour $k = 1$ jusqu'à n **faire**
    pour $i = n$ jusqu'à k par pas de -1 **faire**
        $d_i = \dfrac{d_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-k}}$
    fin pour
fin pour

Remarquer que les éléments d_i en fin d'algorithme correspondent bien aux coefficients c_i du polynôme d'interpolation écrit dans la base de Newton.

V.2.6 Algorithme de Horner

Exercices :
Exercice V.11

Il faut remarquer tout d'abord que la forme

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + c_n(t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_{n-1}).$$

se prête bien à l'évaluation numérique en utilisant le **schéma de Horner** :

1: Les données sont : $c_0, \dots, c_n, t_0, \dots, t_{n-1}, t$
2: $p = c_n$
3: **pour** $k = n - 1$ jusqu'à 0 par pas de -1 **faire**
4: $\quad p = c_k + (t - t_k) * p$
5: **fin pour**

Par exemple, pour n=3, on évalue successivement chacun des crochets en partant du plus interne.

$$p_3(t) = c_0 + (t - t_0)\left[\, c_1 + \ (t - t_1)[\, c_2 + (t - t_2)[c_3]\,]\,\right]. \tag{V.2.8}$$

L'écriture classique donnerait

$$p_3(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + c_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$

ce qui correspond à 5 multiplications.
En exercice, vous montrerez que, de manière générale, pour le calcul de p_n, l'algorithme de Horner comporte n multiplications alors que le calcul "classique" en comporte $2n - 1$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

V.2.7 Convergence du polynôme d'interpolation

Exercices :
Exercice V.12

L'expression de l'erreur :

$$e_n(t) = \frac{1}{(n+1)!}\,\pi_n(t)\,f^{(n+1)}(\xi),$$

obtenue précédemment nous permet déjà, dans quelques cas favorables, d'obtenir des résultats intéressants.

Soit donc $[a,b]$ un intervalle contenant tous les points d'interpolation t_i. Il vient :

$$E_n = \sup_{t\in[a,b]} |e_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |\pi_n(t)| \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|,$$

d'où découle la majoration :

$$E_n \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

il en résulte que $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$, pour toutes les fonctions $f \in C^\infty([a,b])$, dont les dérivées sont bornées uniformément en n. Cette classe de fonctions est assez restreinte, mais contient des fonctions comme e^t, $\sin t$, $\cos t$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Par contre, l'exercice (V.12) montre que pour une fonction aussi raisonnable que

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

interpolée sur l'intervalle $[-5, 5]$, le polynôme d'interpolation ne converge pas uniformément vers f.

V.3 Interpolation avec les splines cubiques

V.3.1 Position du problème

Exemples :
Exemple V.2

L'interpolation polynômiale présente plusieurs inconvénients :

– elle ne prend pas très bien en compte les fonctions assez "raides" ,
– elle converge mal en ce sens qu'augmenter le nombre de points n'améliore guère l'erreur au delà d'un certain degré.

Qualitativement, ces difficultés proviennent de la trop grande rigidité des polynômes. Du fait de cette rigidité, le saut brusque de 0 à 1 engendre des oscillations sur tout son intervalle de définition. Il faut donc avoir recours à une approximation utilisant des fonctions approchées (les éléments de $\tilde{F}$) moins rigides. En d'autres termes, on demandera moins de régularité **globale** aux fonctions de $\tilde{F}$. Ceci, outre les propriétés sympatiques des polynômes, va nous conduire à utiliser dorénavant des **polynômes par morceaux**.

Concrètement, dans ce qui suit on considère une partition de l'intervalle $[a, b]$

$$\Delta = \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \},$$

dont on appellera les points $\boldsymbol{t_i}$ de subdivision les **nœuds**. On suppose donnée une famille de nombres réels $\{y_0, \dots, y_n\}$ qui correspondent, comme précédemment, aux valeurs d'interpolation. Un idée assez naturelle consiste à considérer individuellement chacun des sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ et à construire une approximation **par morceaux** : on obtient ainsi une fonction g vérifiant les conditions d'interpolation $g(t_i) = y_i$ et qui dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ coïncide avec un polynôme $g_i(t)$ de degré plus ou moins élevé. Dans le cas où l'on choisit $g_i(t)$ de degré 1, cette technique consiste à relier les points (t_i, y_i) par des segments de droite : il s'agit de la façon la

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

plus élémentaire d'utiliser ce qu'on appelle les fonctions **splines**. Dans ce cas la courbe d'équation $y = g(t)$ est une ligne brisée, on a donc des points anguleux, la fonction g n'est pas dérivable aux abscisses t_i. On sent bien que si l'on prend des polynômes de degré plus élevé, le choix de $g_i(t)$ n'est plus unique. L'idée consiste à se servir de ces degrés de liberté supplémentaires pour assurer à g une certaine **régularité** aux points t_i. On pourra par exemple imposer à g d'être une ou plusieurs fois continûment dérivable. Dans le cadre de ce cours nous nous limiterons au cas où ces polynômes sont de degré 3.

V.3.2 Définition de la spline cubique d'interpolation

Exercices :
Exercice V.13

Exemples :
Exemple V.3

Définition V.3.1. *Etant donné une partition de l'intervalle* $[a, b]$

$$\Delta = \{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \},$$

On appelle ***spline cubique*** *d'interpolation une fonction notée* g*, qui vérifie les propriétés suivantes :*

- $g \in C^2[a, b]$ *(*g *est deux fois continûment dérivable),*
- g *correspond, sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}]$*, à un polynôme de degré inférieur ou égal à 3,*
- $g(t_i) = y_i$ *pour* $i = 0, 1, \ldots, n$*.*

Remarquons que la définition qui précède ne suffit pas à déterminer de façon unique la fonction spline d'interpolation car il manque des conditions. Comme on va le voir la détermination de la spline nécessite la résolution d'un système linéaire et il manque encore deux équations pour déterminer cette fonction. Ces deux équations proviendront de conditions supplémentaires comme par exemple

$$g''(a) = g''(b) = 0. \tag{V.3.1}$$

Ces deux conditions, rajoutées à celles de la définition (V.3.1), définissent ce qu'on appelle une spline **naturelle**.

Vous verrez dans l'exercice A.1.3 comment construire les splines cubiques naturelles.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemples du chapitre V

Exemple V.1

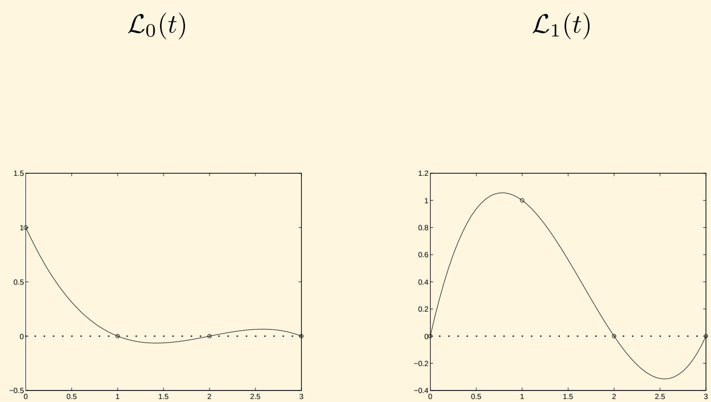

FIG. V.3.1: les polynômes de Lagrange $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$.

Voici un exemple pour $n = 3$. On a choisi $t_i = i$, et on a

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6}, \quad \mathcal{L}_1(t) = \frac{t(t-2)(t-3)}{2},$$

$$\mathcal{L}_2(t) = \frac{t(t-1)(t-3)}{-2}, \quad \mathcal{L}_3(t) = \frac{t(t-1)(t-2)}{6}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple V.1

$p(t)$

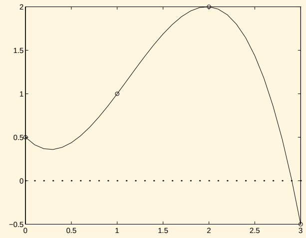

FIG. V.3.2: Le polynôme d'interpolation $p(t)$.

La figure V.3.1 montre les deux premiers de ces polynômes.

Prenons les données suivantes : $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = -\frac{1}{2}$. On obtient le polynôme d'interpolation

$$p(t) = -\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{12} + \frac{t(t-2)(t-3)}{2} \quad \text{(V.3.2)}$$

$$- \; t(t-1)(t-3) - \frac{t(t-1)(t-2)}{12}, \quad \text{(V.3.3)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

représenté sur la figure V.3.2.

retour au cours

Exemple V.2

On peut se faire une idée des problèmes que l'on peut rencontrer en regardant sur la figure V.3.3 le polynôme de Lagrange $\mathcal{L}_{10}$ construit sur 20 points équidistants $t_i = i$, $i = 0 \ldots 19$: ce polynôme présente bien les propriétés requises, à savoir $\mathcal{L}_{10}(t_{10}) = 1$ et $\mathcal{L}_{10}(t_i) = 0, \ i \neq 10$, mais son comportement *entre les points d'interpolation* présente des oscillations d'amplitude très importante, laissant présager des oscillations pour le polynôme d'interpolation lui-même.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple V.2

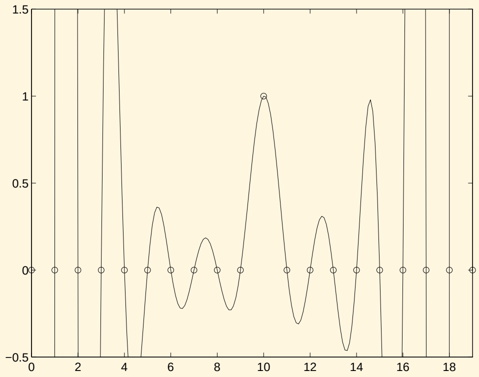

FIG. V.3.3: $\mathcal{L}_{10}(t)$ pour $n = 19$.

Exemple V.3

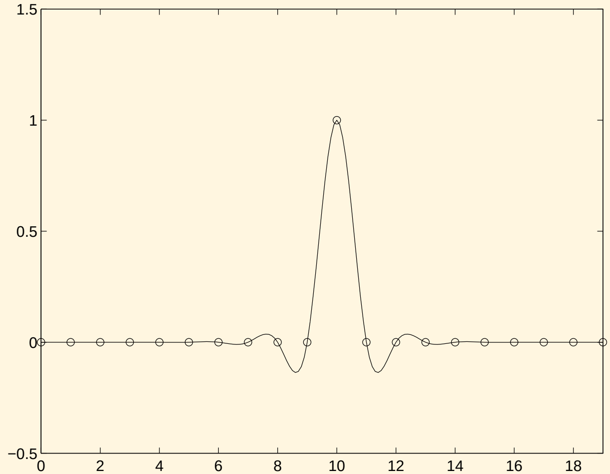

FIG. V.3.4: La spline cubique $g(t)$.

On peut regarder ce que donne une spline cubique sur l'exemple suivant : $n = 19$, $t_i = i$, $i = 0 \ldots 19$ et $y_{10} = 1$, $y_i = 0$ pour $i \neq 10$. On essaye en fait de construire une fonction $g(t)$ similaire au polynôme de Lagrange $\mathcal{L}_{10}(t)$. La figure V.3.4, à comparer avec la figure V.3.3, montre l'efficacité des splines par rapport à l'interpolation polynômiale.

retour au cours

Exemple V.3

Documents du chapitre V

Document V.1 Démonstration du théorème V.2.2

1) S'il existe un j tel que $t = t_j$, l'erreur est nulle et la formule (V.2.4) est immédiate.

2) Si, quel que soit j, $t \neq t_j$, alors $\pi_n(t) \neq 0$, et nous pouvons définir, une fonction g_n de la variable z par :

$$g_n(z) = f(z) - p_n(z) - e_n(t)\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(t)}.$$

Il est clair que $g_n(t) = 0$ et $g_n(t_j) = 0$ pour $j = 0, \dots, n$. Nous voyons ainsi que $g_n(z)$ s'annule $n+2$ fois dans l'intervalle $\mathrm{Int}\,(t, t_0, \dots, t_n)$. En appliquant plusieurs fois le Théorème de *Rolle* [1] nous voyons de même que :

- $g_n^{'}$ s'annule au moins $n+1$ fois dans cet intervalle,
- $g_n^{''}$ s'annule au moins n fois dans cet intervalle , etc
- $g_n^{(n+1)}$ s'annule au moins 1 fois dans l'intervalle $\mathrm{Int}\,(t, t_0, \dots, t_n)$.

Notons alors $\xi_t \in \mathrm{Int}\,(t, t_0, \dots, t_n)$ la (ou l'une des) valeur(s) de z telle que $g_n^{(n+1)}(\xi_t) = 0$. Comme la fonction g_n dépend de t, le point ξ_t aussi. Par ailleurs, comme p_n est un polynôme de degré n,

$$p_n^{(n+1)}(z) = 0.$$

De même, comme le terme de plus haut degré de $\pi_n(t)$ est t^{n+1} nous avons :

$$\pi_n^{(n+1)}(z) = (n+1)!$$

de sorte que

$$g_n^{(n+1)}(\xi_t) = f^{(n+1)}(\xi_t) - e_n(t)\frac{(n+1)!}{\pi_n(t)} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Retour au théorème V.2.2 ▲

[1] Si f est continûment dérivable sur $[a, b]$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document V.2 Analogie des expressions des polynômes d'interpolation et de Taylor

L'expression de la partie polynomiale du développement de Taylor d'une fonction f suffisamment dérivable est classique. Elle s'écrit :

$$P(t) = P(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0).$$

Nous avons vu que le polynôme d'interpolation admet l'expression :

$$P(t) = P(t_0) + (t - t_0)f[t, t_0] + \cdots + (t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{n-1})f[t_0, t_1, \ldots, t_n].$$

Nous allons voir que, dans le cas de points d'interpolation équidistants, il est possible d'obtenir une expression de ce polynôme ressemblant encore plus à celle du polynôme de Taylor. En effet, on montre que, en posant

$$h = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1}, \quad s = \frac{(t - t_0)}{h}$$

$$\Delta_1 f_i = f(t_{i+1}) - f(t_i), \quad \Delta_k f_i = \Delta_{k-1} f(t_{i+k}) - \Delta_{k-1} f(t_i),$$

il vient (à démontrer)

$$(t - t_0)(t - t_1)\cdots(t - t_{k-1})f[t_0, t_1, \ldots, t_k] = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}\Delta_k f_0$$

d'où l'on déduit (à démontrer) l'expression du polynôme d'interpolation :

$$P(t) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_2 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta_n f_0.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si du fait de contacts suffisants avec les sciences physiques ou mécaniques, on a été sensibilisé au problème des dimensions des diverses grandeurs rencontrées dans ses équations, on sera très attentif ici.

Les différences $(t - t_i)$ ont la dimension d'une longueur par exemple (ou d'un temps ou toute autre peu importe). Ainsi, dans la formule de Taylor, la dimension de $(t - t_0)^k$ est compensée par les k quotients par $t - t_0$ introduits dans la dérivée k-ème de f.

Par contre,les grandeurs s, $s - 1$,... sont adimenssionnelles. C'est pourquoi apparaissent des différences $\Delta_k f_0$ qui ne font intervenir aucune division.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercices du chapitre V

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.1

Soit f une fonction connue aux points d'abscisse t_i ($0 \leq i \leq n$), supposées toutes distinctes. Soit l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Tout polynôme p de $\mathcal{P}_n$ peut s'écrire

$$p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n.$$

On cherche $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $p(t_i) = f(t_i), i = 0, ..., n$.

Ecrire les conditions d'interpolation, montrer que le système linéaire obtenu admet une solution unique.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.2

On suppose la fonction f connue aux points $\{-1, 0, 1\}$ où elle prend les valeurs $\{0, 1, 0\}$ et soit $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes de degré au plus m. Quelle est la valeur minimale de m qui conduit à une technique d'interpolation ? Pour quelle valeur de m le polynôme d'interpolation est unique ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.3

On considère les points du plan $\{(t_i, z_i),\ 0 \le i \le n\}$ avec $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

1. Écrire l'équation de la droite passant par les points (t_i, z_i) et (t_{i+1}, z_{i+1}) en utilisant la base de Lagrange.
2. Écrire l'équation de la ligne brisée qui interpole tous les points.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.4

Soit n un entier naturel.

1. Calculer l'erreur commise en interpolant la fonction $f(t) = t^n$, définie sur l'intervalle $[0, 1]$, en les points $t_i = i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, à l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n. Expliquer le résultat.
2. Même question pour la fonction $g(t) = t^{n+1}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.5

Montrer que les polynômes

$$1,\ (t-t_0),\ (t-t_0)(t-t_1), \ldots,\ (t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{n-1}),$$

forment une base de $\mathcal{P}_n$, ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.6

On a $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$, $f(t_0) = 1, f(t_1) = 3, f(t_2) = 4$.
Ecrire le polynome p_0 de degré 0 qui interpole f en t_0.
Ecrire le polynome p_1 de degré 1 qui interpole f en t_0, t_1.
Ecrire le polynome p_2 de degré 2 qui interpole f en t_0, t_1, t_2.
Ecrire chacun des polynômes dans la base de Newton.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ donné, soit p_n le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui interpole f en $t_0, t_1, ..., t_n$, on veut évaluer l'erreur en θ, c'est-à-dire $e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta)$. Si θ est égal à l'un des t_i, l'erreur est nulle.

Supposons maintenant que $\theta \neq t_i, \forall i = 0, ..., n$.

On définit alors le polynôme p par

$$p(t) = p_n(t) + \Pi_n(t) \frac{f(\theta) - p_n(\theta)}{\Pi_n(\theta)}$$

où $\Pi_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - t_i)$.

1. Montrez que p interpole f aux points $\{t_0, t_1, \ldots, t_n, \theta\}$. Quel est le degré de p ?
2. En déduire $p(t) - p_n(t)$ en fonction de $f[t_0, t_1, \ldots, t_n, t]$.
3. En déduire le calcul de l'erreur $e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.8

Soit la fonction f connue aux trois points d'abscisse t_0, t_1 et t_2. On considère le polynôme d'interpolation dans la base de Newton avec les notations du cours. Montrer, par le calcul, que

$$c_2 = f[t_0, t_1, t_2]$$

en utilisant la définition et la symétrie des différences divisées.

retour au cours

Solution

Exercice V.9

Calculer les coefficients c_k du polynôme d'interpolation p_3 de l'exemple V.1 , dans la base de Newton.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.10

On a calculé à l'aide des différences divisées le polynôme p_n d'interpolation de f aux points $\{t_0, \ldots, t_n\}$. On désire rajouter un point d'interpolation t_{n+1}. Doit-on refaire tout le tableau des différences divisées ? Et, si on utilisait la base des polynômes de Lagrange, devrait-on refaire tous les calculs ?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.11

Calculer le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour évaluer, en un point t, la valeur de

$$p_n(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + c_n(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_{n-1}).$$

1. Par la méthode 'naturelle', en écrivant l'algorithme
2. Par le schéma de Horner.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.12

Mettre en évidence expérimentalement, en utilisant un logiciel de calcul (Matlab, Scilab,...) les difficultés de l'interpolation polynomiale de la fonction $1/(1+t^2)$ sur l'intervalle $[-5,+5]$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice V.13

1. Compter le nombre de degrés de liberté à déterminer pour définir complètement une spline cubique.
2. Compter le nombre d'équations disponibles pour ce faire. Comparer.

retour au cours

Solution

Ź

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de TD du chapitre 5

Exercice A.1.1

1. On définit $t_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3$ et on se donne les nombres réels y_0, y_1, y_2, y_3. Exprimer le polynôme de degré inférieur ou égal à trois tel que $p(t_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ de deux façons différentes (dans les bases de Lagrange et de Newton).
2. Proposer un algorithme pour le calcul des différences divisées dans le cas général.

   Ecrire une fonction Scilab qui étant donnés les t_i et les y_i calcule les différences divisées.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Algorithme de Horner

Algorithme de Horner (pour calculer la valeur d'un polynôme et de ses dérivées successives en un point).

On pose

$$p(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + a_n(t - t_0)\ldots(t - t_{n-1})$$

avec éventuellement les t_i non distincts et même tous égaux à 0 (on obtiendrait alors la base canonique 1, t, $t^2, \ldots, t^n$).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on désire calculer $p(\theta)$ et $p'(\theta)$.

1. On calcule $p(\theta)$ avec la formule précédente, combien doit-on effectuer de multiplications ?
2. On divise $p(t)$ par $(t - \theta)$, c'est-à-dire que l'on écrit

$$p(t) = b_0 + (t - \theta)q(t),$$

avec $b_0 = p(\theta)$ et $q(t)$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$, qui peut s'écrire

$$q(t) = b_1 + b_2(t - t_0) + b_3(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + b_n(t - t_0)\ldots(t - t_{n-2}).$$

Si on écrit

$$(t - \theta) = (t - t_i + t_i - \theta),$$

où i est judicieusement choisi, montrer que l'on peut exprimer simplement les b_i en fonction des a_i. Combien effectue-t-on de multiplications pour calculer $b_0 = p(\theta)$.

3. On divise $q(t)$ par $(t - \theta)$, c'est-à-dire que l'on écrit

$$q(t) = c_1 + (t - \theta)r(t),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

avec $c_1 = q(\theta)$ et $r(t)$ de degré inférieur ou égal à $n-2$, qui peut s'écrire

$$r(t) = c_2 + c_3(t-t_0) + c_4(t-t_0)(t-t_1) + \cdots + c_n(t-t_0)\ldots(t-t_{n-3}).$$

Montrer d'une part que $c_1 = p'(\theta)$ et que l'on peut exprimer simplement les c_i en fonction des b_i.

4. Proposer un algorithme économique permettant de calculer $p(\theta)$ et $p'(\theta)$.
   Ecrire une fonction Scilab qui étant donnés $t_0, t_1, ..., t_n, a_0, a_1, ..., a_n, \theta$ calcule $p(\theta)$ et $p'(\theta)$.
5. Question facultative : On veut maintenant calculer $p^{(j)}(\theta)$ avec $0 \leq j \leq n$. On écrit

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (t-\theta)^i.$$

   (a) Montrer que $\lambda_0 = b_0$, $\lambda_1 = c_1$, $p^{(j)}(\theta) = j!\,\lambda_j$.
   (b) En déduire un algorithme pour calculer $p^{(j)}(\theta)$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 4 Aide 1
Question 5a Aide 1

Exercice A.1.3

On suppose que la fonction f est dérivable sur $[a, b]$.

1. soient t_1, t_1', t_2, t_2' quatre nombre réels distincts appartenant à $[a, b]$, écrire le polymône p d'interpolation de f en t_1, t_1', t_2, t_2' à l'aide des différences divisées.
2. Montrer que les coefficients du polynôme précédent ont une limite quand t_1' tend vers t_1 et t_2' tend vers t_2. Montrer qu'alors p peut s'écrire

$$p(t) = y_1 + (t - t_1)d_1 + (t - t_1)^2 \left(\frac{y_2 - y_1}{h^2} - \frac{d_1}{h} \right) + (t - t_1)^2 (t - t_2) \left(\frac{d_2 + d_1}{h^2} - 2\frac{y_2 - y_1}{h^3} \right).$$

   avec $h = t_2 - t_1$, $y_i = f(t_i)$, $d_i = f'(t_i)$ pour $i = 1, 2$.
3. Montrer que l'on a alors $p(t_i) = y_i,\ p'(t_i) = d_i, i = 1, 2$

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Splines cubiques

On définit $a = t_1 < ... < t_n = b$, on appelle E l'ensemble des fonctions g qui vérifient :

- sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ($1 \leq i \leq n-1$).
- g est une fonction qui est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée seconde est continue sur $[a, b]$.
- $g''(t_1) = g''(t_n) = 0$

Les fonctions g de E sont appelées splines cubiques naturelles.

On va montrer, en la construisant, qu'il existe une spline cubique naturelle telle que $g(t_i) = y_i, i = 1, ..., n$ où les y_i sont des valeurs données.

1. Pour $i = 1, ..., n-1$, on définit les polynômes :

   $$p_i(t) = y_i + (t-t_i)d_i + (t-t_i)^2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2} - \frac{d_i}{h_i}\right) + (t-t_i)^2(t-t_{i+1})\left(\frac{d_{i+1}+d_i}{h_i^2} - 2\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^3}\right).$$

   où $h_i = t_{i+1} - t_i$ et où les coefficients d_i sont des réels quelconques.

   Montrer que $p_i(t_i) = y_i, p_i(t_{i+1}) = y_{i+1}, p_i'(t_i) = d_i, p'i(t_{i+1}) = d_{i+1}$
2. On définit g sur $[a, b]$ par

   $$g(t) = p_i(t), \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

   Montrer que g est bien définie sur $[a, b]$, continue, dérivable, que sa dérivée est continue et que l'on a $g(t_i) = y_i$ et $g'(t_i) = d_i$ pour $i = 1, ..., n$.
3. Calculer $p_i''(t_i)$ et $p_i''(t_{i+1})$.

   Réponse : $p_i''(t_i) = 6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2} - 4\frac{d_i}{h_i} - 2\frac{d_{i+1}}{h_i}, \quad p_i''(t_{i+1}) = -6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2} + 2\frac{d_i}{h_i} + 4\frac{d_{i+1}}{h_i}$

4. Ecrire les conditions pour que :

$$g''(t_1) = 0,\ g''(t_n) = 0.$$

   et pour que la dérivée seconde de g soit définie et continue aux points $t_i, i = 2, ..., n-1$.
5. Ecrire les équations sous la forme d'un système linéaire, dont les inconnues sont les coefficients $d_1, d_2, ..., d_n$, quelle est la matrice du système ? Montrer que la matrice du système est inversible..

Pour la programmation de l'algorithme qui, étant donnés les t_i et les y_i, trace la spline d'équation $y = g(t)$, revoyez votre TP3 et terminez-le si ce n'est déjà fait.

Exercice A.1.5 Polynôme d'interpolation de Hermite.

Soient $t_0, t_1, ..., t_n$, $n+1$ valeurs distinctes de l'intervalle $[a, b]$, soit f une fonction, on suppose que l'on connait $f(t_0), ...f(t_n), f'(t_0), ..., f'(t_n)$. On veut déterminer un polynôme p de degré inférieur ou égal a $2n+1$ tel que :

$$p(t_i) = f(t_i),\ p'(t_i) = f'(t_i),\ i = 0, ..., n$$

1. Montrer que si p existe il est unique.
2. On cherche p sous la forme

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} r_i(t) L_i^2(t) f(t_i) + \sum_{i=0}^{n} s_i(t) L_i^2(t) f'(t_i)$$

   où L_i sont les polynômes de base de Lagrange relatifs aux points $t_0, t_1, ..., t_n$ et où r_i et s_i sont des polynômes de degré inférieur ou égal à un.
   Déterminer l'expression des polynômes r_i et s_i pour $i = 0, ..., n$.
   Application : on choisit $n = 1, t_0 = 0, t_1 = 1$, donner l'expression de $p(t)$.
   Réponse : $p(t) = f(0)(t-1)^2(2t+1) + f(1)t^2(-2(t-1)+1) + f'(0)(t-1)^2 t + f'(1)t^2(t-1)$.
3. On cherche à évaluer l'erreur $e(t) = f(t) - p(t)$. On note $\phi(t) = (t-t_0)...(t-t_n)$, on suppose que f est $2n+2$ fois dérivable sur $[a, b]$, on veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$e(t) = \phi^2(t) \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}. \tag{A.1.1}$$

   (a) Montrer que $e(t_i) = e'(t_i) = 0$ pour $i = 0, ..., n$.
   (b) Montrer que (A.1.2) est vraie si $t = t_i, i = 0, ..., n$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

(c) Soit $t \neq t_i, i = 0, ..., n$, on définit la fonction $g(z)$ par

$$g(z) = f(z) - p(z) - \phi^2(z)\frac{e(t)}{\phi^2(t)}$$

Montrer que
– g s'annule pour au moins $n+2$ valeurs distinctes de $[a, b]$
– g' s'annule pour au moins $n+1$ valeurs distinctes de $[a, b]$.
Utiliser le théorème de Rolle pour montrer que g' s'annule pour au moins $2n+2$ valeurs distinctes de $[a, b]$.
Utiliser à nouveau le théorème de Rolle pour montrer que $g^{(2n+2)}$ s'annule en au moins une valeur c de l'intervalle $]a, b[$. En déduire la relation (A.1.2).

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7 Aide 8
Question 3a Aide 1
Question 3b Aide 1
Question 3c Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice V.1

Le problème s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t_i^k = f(t_i)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,.$$

C'est donc un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. Ce problème a une solution unique puisque la matrice M du système (appelée matrice de Van der Monde) est alors inversible.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^n \\ 1 & t_1 & \ldots & t_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.2

On doit avoir $m \geq 2$ car par trois points non alignés on ne peut faire passer une droite !
Pour $m = 2$, le polynôme d'interpolation s'écrit $p(t) = 1 - t^2$. Remarquons que pour $m > 2$, il passe un infinité de polynômes par trois points.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.3

1. La droite passant par les points (t_i, z_i) et (t_{i+1}, z_{i+1}) a pour équation $y = g_i(t)$. g_i s'écrit :

$$g_i(t) = z_i \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} + z_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

2. La ligne brisée a pour équation $y = g(t)$ où g est une fonction définie par morceau :

$$g(t) = \begin{cases} g_0(t) \quad \text{pour } t \in [t_0, t_1] \\ g_1(t) \quad \text{pour } t \in [t_1, t_2] \\ \ldots \\ g_{n-1}(t) \quad \text{pour } t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

   On peut remarquer que $g_i(t_{i+1}) = g_{i+1}(t_{i+1}) = z_{i+1}$, la fonction g est une fonction continue sur $[t_0, t_n]$, par contre g n'est pas dérivable aux points $t_1, ..., t_{n-1}$, en ces points la courbe présente des points anguleux, les derivées à droite et à gauche existent mais sont différentes.

   On verra plus loin les splines cubiques qui sont également définies par morceaux, mais qui ont plus de régularité.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.4

1. Si l'on applique le résultat sur le calcul d'erreur, on trouve

$$e(t) = 0$$

car la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré n est nulle. Ce résultat s'explique car par $n+1$ points il passe un polynôme et un seul de degré n, c'est donc t^n !

2. Si l'on applique le résultat sur le calcul d'erreur, on trouve

$$e(t) = \frac{1}{(n+1)!}(n+1)!\pi_n(t) = \pi_n(t),$$

car la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré t^{n+1} est $(n+1)!$.

On aurait pu retrouver ce résultat directement. Si l'on note p le polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $p(t_i) = g(t_i), i = 0, 1, ..., n$, alors $g - p$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ qui vérifie $(g-p)(t_i) = 0$, donc $e(t) = (g-p)(t) = \alpha(t-t_0)(t-t_1)...(t-t_n)$, or le coefficient de t^{n+1} dans le polynôme $g-p$ est 1, donc $\alpha = 1$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.5

Les polynômes étant tous de degré distinct, il est facile de montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Or $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$. Donc toute famille libre de $\mathcal{P}_n$ de $n+1$ éléments est une base de $\mathcal{P}_n$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.6

On a

$$p_0(t) = f(t_0) = 1.$$

On a $p_1(t) = c_0 + c_1(t - t_0)$, on écrit que $p_1(t_0) = f(t_0), p_1(t_1) = f(t_1)$, on obtient les coefficients $c_0 = 1, c_1 = 2$,

$$p_1(t) = 1 + 2(t - 1).$$

On a $p_2(t) = c'_0 + c'_1(t - t_0) + c'_2(t - t_0)(t - t_1)$, on écrit que $p_2(t_0) = f(t_0), p_2(t_1) = f(t_1), p_2(t_2) = f(t_2)$, on obtient les coefficients $c'_0 = 1, c'_1 = 2, c'_3 = -\frac{1}{2}$,

$$p_2(t) = 1 + 2(t - 1) - \frac{1}{2}(t - 1)(t - 2).$$

On remarque bien, comme indiqué dans le paragraphe de cours, que les polynômes sont 'emboités' et que pour chaque nouveau polynôme il suffit de calculer un seul coefficient.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.7

1. Par construction de p, il est facile de montrer que $p(t_i) = f(t_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $p(\theta) = f(\theta)$. Le degré de ce polynôme est évidemment égal à $n + 1$.
2. Les propriétés du polynôme de Newton donne :

$$p(t) = p_n(t) + f[t_0, t_1, \ldots, t_n, t]\Pi_n(t).$$

3.

$$e_n(\theta) = f(\theta) - p_n(\theta) = p(\theta) - p_n(\theta) = f[t_0, t_1, \ldots, t_n, \theta]\Pi_n(\theta).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.8

Le polynôme s'écrit

$$p(t) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)(t - t_1).$$

Or

$$p(t_0) = f(t_0) \Rightarrow c_0 = f[t_0]$$

$$p(t_1) = f(t_1) \Rightarrow c_1 = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1} = f[t_0, t_1]$$

$$p(t_2) = f(t_2) \Rightarrow c_2 = \frac{\frac{f(t_2)-f(t_0)}{t_2-t_0} - f[t_0, t_1]}{t_2 - t_1} = \frac{f[t_2, t_0] - f[t_0, t_1]}{t_2 - t_1} = f[t_2, t_0, t_1] = f[t_0, t_1, t_2]$$

On a utilisé la symétrie des différences divisées.

Retour à l'exercice ▲

Pour calculer les coefficients de $p_3(t)$ dans la base de *Newton*, nous sommes conduits à construire le tableau proposé dans le cours pour $n = 3$, ce qui avec les données de l'exercice nous donne :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$t_0 = 0$	$f[t_0] = \frac{1}{2}$			
$t_1 = 1$	$f[t_1] = 1$	$f[t_0, t_1] = \frac{1}{2}$		
$t_2 = 2$	$f[t_2] = 2$	$f[t_1, t_2] = 1$	$f[t_0, t_1, t_2] = \frac{1}{4}$	
$t_3 = 3$	$f[t_3] = -\frac{1}{2}$	$f[t_2, t_3] = -\frac{5}{2}$	$f[t_1, t_2, t_3] = -\frac{7}{4}$	$f[t_0, t_1, t_2, t_3] = -\frac{2}{3}$

On peut donc écrire $p_3(t)$ de la façon suivante :

$$p_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t(t-1) - \frac{2}{3}t(t-1)(t-2).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.10

Si vous avez compris les calculs effectués dans le tableau des différences divisées du paragraphe Différences divisées / Calcul pratique , il suffit d'ajouter une ligne à ce tableau pour ajouter un point d'interpolation. Les coefficients $\{c_0, \ldots, c_n\}$ sont les mêmes que ceux de p_n le dernier coefficient de la dernière ligne donnera c_{n+1}. Si les calculs ont été faits à la main, vous les avez évidemment gardés. Par contre, si vous avez utilisé l'algorithme donné dans le même paragraphe, une colonne se superpose à la précédente, et le tableau complet n'est donc pas gardé en mémoire. Il faut donc penser à stocker le tableau ...

En ce qui concerne la base des polynômes de Lagrange, chacun d'eux est construit à partir de tous les points d'interpolation, ce qui nécessite de recalculer tous ces polynômes lorsque l'on rajoute un point d'interpolation !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.11

1. L'algorithme "classique" est le suivant :

   Les données sont : $c_0, \ldots, c_n, t_0, \ldots, t_{n-1}, t$
   $q = t - t_0$
   $p = c_0 + c_1 * q$
   pour $k = 2$ jusqu'à n **faire**
       $q = q * (t - t_{k-1})$
       $p = p + c_k * q$
   fin pour

   Ceci correspond à $2n - 1$ multiplications, n additions et n soustractions.

2. Le schéma de Horner, dont l'algorithme est donné dans le cours compte n multiplications, n additions et n soustractions.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice V.13

Sur chacun des n intervalles $[t_i, t_{i+1}], i = 0, ..., n-1$, g est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, on a donc $g(t) = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i t^2 + \delta_i t^3$, il y a donc $4n$ inconnues.

On doit avoir

$$g(t_i^+) = g(t_i^-), g'(t_i^+) = g'(t_i^-), g''(t_i^+) = g''(t_i^-), i = 1, ..., n-1$$

afin que la fonction g soit 2 fois continûment dérivable. On obtient donc $3(n-1)$ équations.

La fonction g doit interpoler, on doit donc avoir $g(t_i) = y_i, i = 0, ..., n$.

On a donc au total $3n - 3 + n + 1 = 4n - 2$ équations.

Il manque donc deux équations, c'est pourquoi on impose, par exemple, les conditions supplémentaires :

$$g''(t_0) = g''(t_n) = 0$$

Retour à l'exercice ▲

Dans la base de Lagrange :

$$p(t) = y_0 \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6} + y_1 \frac{t(t-2)(t-3)}{2} + y_2 \frac{t(t-1)(t-3)}{-2} + y_3 \frac{t(t-1)(t-2)}{6}.$$

Dans la base de Newton :

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-1) + \alpha_3 t(t-1)(t-2),$$

avec

$$\alpha_0 = y_0,\ \alpha_1 = y_1 - y_0,\ \alpha_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2},\ \alpha_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6}.$$

On peut vérifier que les deux polynômes sont identiques, c'est-à-dire que le coefficient constant, les coefficients de t , t^2 et t^3 sont les mêmes.

Par exemple on vérifie rapidement que le coefficient de t^3 est α_3 dans les deux cas, le coefficient constant est y_0 dans les deux cas.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.1

Pour l'algorithme voir le paragraphe "Différences divisées / Calcul pratique ".

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe de cours Horner et l'exercice V.11

Retour à l'exercice ▲

On doit retrouver les résultats du paragraphe Horner

Retour à l'exercice ▲

On a $p(t) = b_0 + (t - \theta)q(t)$ donc $p'(\theta) = q(\theta) = c_1$.

On a un parallèle entre p et q d'une part et q et r d'autre part.

Retour à l'exercice ▲

On a d'une part :

$$p(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + a_n(t - t_0)\dots(t - t_{n-1})$$

$$p(t) = b_0 + (t - \theta)q(t) \text{ avec } q(t) = b_1 + b_2(t - t_0) + b_3(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + b_n(t - t_0)\dots(t - t_{n-2}).$$

On a d'autre part :

$$q(t) = b_1 + b_2(t - t_0) + b_3(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + b_n(t - t_0)\dots(t - t_{n-2}).$$

$$q(t) = c_1 + (t - \theta)r(t) \text{ avec } r(t) = c_2 + c_3(t - t_0) + c_4(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + c_n(t - t_0)\dots(t - t_{n-3}).$$

De même que l'on a obtenu les b_i à partir des a_i, on obtient les c_i à partir de b_i. Mais attention il y a un décalage d'indice.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} c_n = b_n \\ c_{n-1} = b_{n-1} - (t_{n-2} - \theta)c_n \\ \dots \\ c_1 = b_1 - (t_0 - \theta)c_2 \end{array} \right.$$

Retour à l'exercice ▲

Voir les travaux pratiques.

Retour à l'exercice ▲

On reconnait le développement de Taylor d'un polynôme :

$$p(t) = p(\theta) + (t-\theta)p'(\theta) + \frac{(t-\theta)^2}{2}p''(\theta) + ... + \frac{(t-\theta)^n}{n!}p^{(n)}(\theta)$$

donc par identification

$$\lambda_0 = b_0 = p(\theta),\ \lambda_1 = c_1 = p'(\theta),\ \lambda_2 = \frac{p''(\theta)}{2!}, ..., , \lambda_n = \frac{p^{(n)}(\theta)}{n!}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.3

$$p(t) = f[t_1] + f[t_1, t_1'](t - t_1) + f[t_1, t_1', t_2](t - t_1)(t - t_1') + f[t_1, t_1', t_2, t_2'](t - t_1)(t - t_1')(t - t_2).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.3

$$f[t_1, t_1'] = \frac{f(t_1) - f(t_1')}{t_1 - t_1'} \underset{t_1' \to t_1}{\longrightarrow} f'(t_1) = d_1$$

Continuez pour les autres différences divisées.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.1.3

$$f[t_1,t_1',t_2] = \frac{f[t_1,t_1'] - f[t_1',t_2]}{t_1 - t_2} \underset{t_1' \to t_1}{\longrightarrow} \frac{f'(t_1) - f[t_1,t_2]}{t_1 - t_2} = -\frac{d_1}{h} - \frac{y_1 - y_2}{h^2}$$

$$f[t_1',t_2,t_2'] = \frac{f[t_1',t_2] - f[t_2,t_2']}{t_1' - t_2'} \underset{(t_1',t_2') \to (t_1,t_2)}{\longrightarrow} \frac{f[t_1,t_2] - f'(t_2)}{t_1 - t_2}$$

$$\begin{aligned} f[t_1,t_1',t_2,t_2'] = \frac{f[t_1,t_1',t_2] - f[t_1',t_2,t_2']}{t_1 - t_2'} \underset{(t_1',t_2') \to (t_1,t_2)}{\longrightarrow} \frac{\frac{f'(t_1)-f[t_1,t_2]}{t_1-t_2} - \frac{f[t_1,t_2]-f'(t_2)}{t_1-t_2}}{t_1 - t_2} &= \frac{f'(t_1) - 2f[t_1,t_2] + f'(t_2)}{(t_1 - t_2)^2} \\ &= \frac{d_1 + d_2}{h^2} + 2\frac{y_1 - y_2}{h^3} \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

On a

$$p(t) = y_1 + d_1(t-1) + \left(-\frac{d_1}{h} - \frac{y_1 - y_2}{h^2}\right)(t-t_1)^2 + \left(\frac{d_1+d_2}{h^2} + 2\frac{y_1-y_2}{h^3}\right)(t-t_1)^2(t-t_2),$$

calculez $p(t_1), p(t_2), p'(t_1), p'(t_2)$ et vérifiez le résultat demandé.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.5

On suppose qu'il existe deux polynômes qui répondent à la question et on montre qu'il sont égaux ou plus pésicément que leur différence q est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Quel est le degré de q ?

Comptabilisez le nombre de racines de q.

Retour à l'exercice ▲

Les $t_i,\ i = 1, ..., n$ sont des racines doubles de q puisque $q(t_i) = q'(t_i) = 0$..

q a donc $2n + 2$ racines.

q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n + 1$.

Donc q est identiquement nul

Retour à l'exercice ▲

Souvenez-vous des propriétés des polynômes L_i.

Calculez $p(t_i)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.1.5

$$p(t_i) = r_i(t_i)f(t_i) + s_i(t_i)f'(t_i). \tag{A.1.2}$$

On doit avoir $p(t_i) = f(t_i)$ pour toutes les fonctions f.
Quelle est la conséquence sur $r_i(t_i)$ et $s_i(t_i)$?

Retour à l'exercice ▲

On doit donc avoir

$$r_i(t_i) = 1,\ s_i(t_i) = 0.$$

Calculez $p'(t)$ et écrivez les conditions pour que $p'(t_i) = f'(t_i)$.

Retour à l'exercice ▲

$$
\begin{aligned}
p'(t) &= \sum_{j=0}^{n} \left[r_j'(t) L_j^2(t) f(t_j) + 2\, r_j(t) L_j'(t) L_j(t) f(t_j) \right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n} \left[s_j'(t) L_j^2(t) f'(t_j) + 2\, s_j(t) L_j'(t) L_j(t) f'(t_j) \right]
\end{aligned}
$$

Calculez $p'(t_i)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 2, Exercice A.1.5

$$p'(t_i) = r_i'(t_i) f(t_i) + 2\, L_i'(t_i) f(t_i) + s_i'(t_i) f'(t_i).$$

On doit avoir $p'(t_i) = f'(t_i)$ pour toutes les fonctions f.

Quelle est la conséquence sur les fonctions r_i et s_i ?

Retour à l'exercice ▲

On doit donc avoir :

$$r_i'(t_i) = -2\,L_i'(t_i), \quad s_i'(t_i) = 1.$$

En déduire l'expression des polynômes r_i et s_i.

Retour à l'exercice ▲

r_i et s_i sont des polynômes de degré inférieur ou égal à un qui vérifient :

$$r_i(t_i) = 1, \;\; r_i'(t_i) = -2\,L_i'(t_i).$$

$$s_i(t_i) = 0, \;\; s_i'(t_i) = 1.$$

En déduire leur expression.

Retour à l'exercice ▲

Aide 8, Question 2, Exercice A.1.5

$$r_i(t) = -2\,L_i'(t_i)(t - t_i) + 1$$

$$s_i(t) = t - t_i$$

Retour à l'exercice ▲

C'est évident, on a :

$$f(t_i) = p(t_i),\ f'(t_i) = p'(t_i).$$

Retour à l'exercice ▲

En t_i, les deux expressions sont nulles.

Retour à l'exercice ▲

On a $g(t) = 0$, $g(t_i) = 0$ pour $i = 1, ..., n$, donc g s'annule pour $n + 2$ valeurs distinctes : t, t_0, t_1, ..., t_n.

On peut ordonner ces $n + 2$ valeurs distinctes et les noter : $t'_0 < t'_1 < ... < t'_{k-1} < t'_k < t'_{k+1} < ... < t'_{n+1}$.

Retour à l'exercice ▲

$$g'(z) = f'(z) - p'(z) - 2\phi'(z)\phi(z)\frac{e(t)}{\phi^2(t)}.$$

Vérifiez que $g'(t_i) = 0 \quad$ **pour** $i = 1, ..., n$.

Retour à l'exercice ▲

g est continue sur chaque intervalle $[t'_i,\, t'_{i+1}]$, et dérivable sur $]t'_i,\, t'_{i+1}[\ i = 0, \mathinner{..} n+1$. g s'annule en t'_i, $i = 0, \mathinner{..} n+1$. D'après le théorème de Rolle,

$$\exists\, c'_i \in]t'_i,\, t'_{i+1}[,\ g'(c_i) = 0.$$

Il y a (n+1) intervalles donc (n+1) c'_i : $c'_0, c'_1, ..., c'_n$. Les c'_i sont différents des t'_j, donc des t_k.

Donc g' s'annule pour 2n+2 valeurs distinctes sur $[a,b]$: $t_0,\ t_1, ...,\ t_n$, $c'_0, c'_1, ..., c'_n$.

En appliquant à nouveau le théorème de Rolle (à la fonction g'), on pourrait montrer que g'' s'annule pour 2n+1 valeurs distinctes sur $[a,b]$.

On montrerait successivement que g''' s'annule pour 2n valeurs distinctes sur $[a,b]$,..., g^{2n+2} s'annule pour une valeur c appartenant à $[a,b]$. Calculez $g^{(2n+2)}(z)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 3c, Exercice A.1.5

$$g^{(2n+2)}(z) = f^{(2n+2)}(z) - (2n+2)!\,\frac{e(t)}{\phi^2(t)}$$

car ϕ^2est un polynôme de degré $2n+2$ donc il ne reste plus que la dérivée $(2n+2)^{ieme}$ de t^{2n+2} soit $(2n+2)!$ et p est lui de degré $2n+1$ donc sa dérivée $(2n+2)^{ieme}$ est nulle.

$$g^{(2n+2)}(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = f^{(2n+2)}(c) - (2n+2)!\,\frac{e(t)}{\phi^2(t)} \Longleftrightarrow e(t) = \phi^2(t)\frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!}$$

Retour à l'exercice ▲