MT09-Analyse numérique élémentaire

Chapitre 6 : Intégration

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Juin 2007

Chapitre VI
Intégration

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.1 Motivations et principe des méthodes numériques d'intégration

Documents :
Document VI.1

Il existe deux situations où l'on a besoin de formules pour approcher l'intégrale d'une fonction f :

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

- On ne connaît la valeur de f qu'en certains points $t_0, t_1, \dots, t_n$, et il n'est pas possible d'avoir d'autres valeurs que celles-ci (c'est le cas quand la fonction f est tabulée).
- Il est possible de calculer $f(t)$ pour un t quelconque, mais la primitive de f n'est pas connue, ou bien l'expression analytique de f est trop compliquée pour être explicitée ($f(t)$ est par exemple le résultat d'un code de calcul trop complexe).

Dans ces deux situations, on doit donc chercher à approcher $I(f)$ à l'aide d'un nombre fini de valeurs de f en certains points $t_0, t_1, \dots, t_n$ qui sont soit imposés, soit à choisir de façon optimale pour que l'approximation soit la meilleure possible. Plus précisément on aura recours à des combinaisons linéaires de valeurs de la fonction à intégrer en des points de l'intervalle d'intégration, soit

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(t_i). \tag{VI.1}$$

Les points t_i sont appelés les **nœuds** de la formule, les w_i sont les **poids** (weights, en anglais), parfois aussi dénommés **coefficients** de la formule. L'application

$$f \mapsto \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(t_i)$$

qui à f fait correspondre une valeur 'approchée' de son intégrale sur l'intervalle considéré définit une **formule** (ou **méthode) d'intégration numérique**. On dit aussi formule ou méthode de **quadrature**. Quelques commentaires sont donnés en document.

VI.1 Méthodes utilisant le polynôme d'interpolation

VI.1.1 Principe de la méthode

Exercices :
Exercice VI.1

Exemples :
Exemple VI.1

Pour approcher l'intégrale $I(f)$ par une combinaison linéaire des valeurs de f en des points $t_0, t_1, \ldots, t_n$, une première méthode consiste à approcher $I(f)$ par

$$J(f) = \int_a^b p_f(t)\, dt,$$

où $p_f(t)$ est le polynôme qui interpole f aux points distincts $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Ces points sont choisis le plus souvent dans l'intervalle $[a, b]$. Nous rencontrerons cependant, dans le chapitre sur les équations différentielles, des formules de quadrature utilisant des nœuds extérieurs à l'intervalle d'intégration. La justification en est très simple : cela permet d'utiliser les valeurs de la fonction à intégrer en des points où ces valeurs ont déjà été calculées.

Nous avons vu au chapitre précédent que le polynôme d'interpolation s'exprime dans la base de Lagrange par

$$p_f(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\mathcal{L}_i(t).$$

Nous obtenons alors directement

$$J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i), \;\; \text{avec} \;\; w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\, dt. \tag{VI.1.1}$$

La formule (VI.1.1) est appelée **formule de quadrature**.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

De manière équivalente, nous pouvons aussi obtenir les coefficients w_i en écrivant que la formule doit être exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n, soit de façon équivalente pour chacun des monômes de la base canonique de $\mathcal{P}_n$. Cette équivalence se démontre facilement, voir l'exercice référencé.

On peut donc calculer les coefficients $w_0, \ldots, w_n$, en écrivant que $I(p) = J(p)$ pour $p \in \{p_0, p_1, ..., p_n\}$ où $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ est la base canonique de $\mathcal{P}_n$. On obtient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_0 & t_1 & \ldots & t_n \\ t_0^2 & t_1^2 & \ldots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \ldots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad \text{(VI.1.2)}$$

où

$$v_k = \int_a^b t^k \, dt.$$

La matrice de ce système est une matrice de **Vandermonde**. Son déterminant est non nul si et seulement si les points t_i sont deux à deux distincts. Le système (VI.1.2) admet donc effectivement une solution et une seule.

L'exemple référencé vous permet de voir sur un cas particulier les deux méthodes pour calculer les w_i.

Principe de la méthode

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.1.2 Intervalle de référence

Exercices :
Exercice VI.2

Exemples :
Exemple VI.2

Une fois les nœuds t_i choisis, les poids w_i ne dépendent pas de la fonction f à intégrer. Par contre, ils dépendent de a et b. Nous allons voir maintenant, qu'il est possible de se ramener sans restriction aucune à approcher des intégrales sur un unique intervalle dit **intervalle de référence**. Nous choisirons l'intervalle $[-1, 1]$, car sa symétrie par rapport à 0 simplifie les calculs. Par contre, on aurait pu choisir tout autre intervalle, comme par exemple $[0, 1]$.

Nous allons donc ramener le calcul d'une intégrale sur un intervalle $[a, b]$ à celui d'une intégrale sur $[-1, 1]$, en utilisant un changement de variable affine. En effet si on pose

$$t = \frac{a + b + (b - a)u}{2},$$

on peut écrire que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 g(u)\,du,$$

avec

$$g(u) = f\left(\frac{a + b + (b - a)u}{2}\right).$$

Nous pouvons ainsi définir des formules de quadrature sur $[-1, 1]$, où ni les nœuds, ni les poids ne dépendent de a ou b. Ce sont ces formules que l'on retrouve dans les tables des livres consacrés à l'intégration numérique.

Intervalle de référence

On ne retrouve pas une situation aussi simple quand on doit calculer des intégrales doubles ou triples. En effet, il n'existe pas de transformation de coordonnées *simple* permettant de passer d'un domaine bi ou tri-dimensionnel quelconque à un domaine de référence. On a alors des familles de formes de domaines (triangles, quadrangles, tétraèdres,. . .) et pour chacune de ces familles, un domaine de référence. Le passage de la dimension 1 à la dimension 2 ou 3 change le niveau de complexité du problème de la quadrature.

VI.1.3 Majoration de l'erreur de quadrature - ordre

Exercices :
Exercice VI.3
Exercice VI.4
Exercice VI.5

Exemples :
Exemple VI.3

L'erreur de quadrature est donnée par

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b (f(t) - p_f(t))\, dt.$$

Or si f est une fonction $n+1$ fois continûment dérivable et si p_f est son polynôme d'interpolation de degré n, nous avons vu dans le chapitre consacré à l'interpolation, que :

$$f(t) - p_f(t) = (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} = \pi_n(t)\frac{f^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!},$$

où $\xi(t) \in \text{Int}\,(t, t_0, \dots, t_n)$. On a donc

$$|E(f)| \leq \int_a^b |\pi_n(t)| \frac{|f^{(n+1)}(\xi(t))|}{(n+1)!}\, dt = \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(t)|\, dt,$$

où $\eta \in \text{Int}\,(a, b, t_0, \dots, t_n)$ (on a appliqué le deuxième théorème de la moyenne [1]). On peut encore majorer :

$$|E(f)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(t)|\, dt,$$

[1] Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et que g ne change pas de signe sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$.

où $M > 0$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur Int $(a, b, t_0, \ldots, t_n)$.

On retrouve bien que si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $E(f) = 0$, c'est à dire que l'approximation est exacte. Nous verrons plus loin, en particulier dans l'exemple et un exercice référencés ci-dessus, que l'on peut obtenir des estimations plus fines de l'erreur.

Définition VI.1.1. *Une formule de quadrature exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n (n maximum) est dite* **d'ordre** *n ou de degré d'exactitude n.*

VI.1.4 Formules de Newton-Cotes

Exercices :
Exercice VI.6

Nous allons énumérer maintenant quelques formules classiques construites avec des t_i fixés équidistants. On suppose que $t_0 = a, t_n = b$ et que les points t_i sont équidistants :

$t_{j+1} - t_j = h = \dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, j = 0, 1, \ldots, n-1$. On a alors $t_i = a + ih$, pour $i = 0, \ldots, n$.

On généralise à un nombre quelconque de points l'idée utilisée pour la méthode des trapèzes : on approche $I(f)$ par $J(f) = \displaystyle\int_a^b p_f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i)$, où p_f interpole f aux points $t_0, \ldots, t_n$.

Donnons maintenant les formules obtenues pour diverses valeurs de n. Nous donnerons en même temps, pour chacune d'elles, une estimation de l'erreur E correspondante. Formules de Newton-Cotes pour $n = 1, 2, 3$:

– $n = 1$: formule des *trapèzes* ($h = b - a$) :

$$J(f) = \frac{h}{2}\left(f(t_0) + f(t_1)\right);\ \exists \eta \in [a, b], E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta).$$

– $n = 2$: formule de *Simpson* ($h = (b-a)/2$) :

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)\right);\ \exists \eta \in [a, b],\ E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta).$$

– $n = 3$: formule de *Simpson* 3/8 ($h = (b-a)/3$) :

$$J(f) = \frac{3h}{8}\left(f(t_0) + 3f(t_1) + 3f(t_2) + f(t_3)\right);\ \exists \eta \in [a, b],\ E(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\eta).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On a le résultat général suivant :

Théorème VI.1.1 (Formules de Newton-Cotes avec reste).
Si n est pair et si f est $n+2$ fois continûment dérivable, il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)\dots(t-n)\,dt,$$

Si n est impair et si f est $n+1$ fois continûment dérivable, il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^n w_i f(t_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)\,dt,.$$

Les coefficients w_i sont obtenus par résolution du système (VI.1.2) ou par le calcul de $\int_a^b p_f(t)\,dt$, où p_f est le polynôme d'interpolation.

On peut remarquer que pour n pair (donc un nombre impair de points) les formules de Newton-Cotes sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $n+1$, alors que pour n impair, ces formules sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n. Le cas n pair donne donc des formules d'ordre plus élevé que prévu. Ceci a une conséquence directe : lorsque n est pair, ajouter un seul point n'améliore pas l'approximation de l'intégrale, il faut ajouter 2 points.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.1.5 Intégration numérique composée

Exercices :
Exercice VI.7

Documents :
Document VI.2

Dans la pratique on dépasse rarement $n = 2$, pour les mêmes raisons qui font préférer les splines au polynôme d'interpolation qui a tendance à osciller fortement quand n devient grand. Pour traiter de grands intervalles on utilise une approche locale : on découpe d'abord l'intervalle $[a, b]$ et on applique des formules d'ordre faible sur les sous-intervalles. Par exemple pour la méthode des trapèzes :

1. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles à l'aide de points de subdivision $t_i = a + ih$, pour $i = 0, \ldots, N$, avec $h = (b - a)/N$,
2. puis sur chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ on applique la méthode des trapèzes.

On obtient ainsi la formule composée suivante :

$$\begin{aligned} J(f) &= h\left(\frac{f(t_0)+f(t_1)}{2} + \frac{f(t_1)+f(t_2)}{2} + \cdots + \frac{f(t_{N-1})+f(t_N)}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{1}{2}f(t_0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + \frac{1}{2}f(t_N)\right). \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'erreur, on somme les erreurs commises sur chacun des sous-intervalles, soit

$$E(f) = \sum_{i=0}^{N-1} E_i(f), \text{ avec } E_i(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i),$$

où $\eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. On applique alors le théorème de la valeur intermédiaire [2] pour invoquer

[2] Si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = [f(a) + f(b)]/2$.

l'existence d'un nombre $\eta \in [a,b]$ tel que

$$f''(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i),$$

l'erreur globale s'écrit

$$E(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta).$$

De même pour la méthode de Simpson : on suppose que N est pair, soit $N = 2M$. La formule obtenue est la suivante (à montrer en exercice) :

$$J(f) = \frac{h}{3} \left(f(t_0) + 4 \sum_{i=0}^{M-1} f(t_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(t_{2i}) + f(t_{2M}) \right),$$

où on a toujours posé $h = (b-a)/N$, et par la même technique que précédemment, on obtient l'estimation d'erreur :

$$E(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta),\ \eta \in [a,b].$$

Dans le document référencé, on trouve un calcul d'estimation a posteriori de l'erreur et une technique d'utilisation de ces estimations pour construire des méthodes de quadrature **adaptatives**.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2 Quadrature de *Gauss-Legendre*

VI.2.1 Les polynômes de Legendre

Exercices :
Exercice VI.8

Le problème considéré est toujours le même, à savoir trouver une formule

$$J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i),$$

faisant intervenir $n+1$ valeurs de f, permettant d'approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Les formules de Newton-Cotes consistent à choisir les t_i équidistants sur l'intervalle $[a, b]$. On a vu au théorème VI.1.1 que ces formules sont au mieux d'ordre $n+1$. Lorsqu'il est possible de connaître $f(t)$ pour t quelconque, on peut imaginer choisir non seulement les poids w_i, mais aussi les points t_i, de manière à obtenir une formule d'ordre plus élevé. On dispose alors de $2n+2$ degrés de liberté, et on peut espérer obtenir ainsi une formule à $n+1$ points d'ordre $2n+1$. Nous allons voir maintenant comment choisir ces $2n+2$ paramètres.

Définition VI.2.1. *On appelle* ***polynôme de Legendre*** *d'ordre k le polynôme*

$$g_k(t) = \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

– On a $g_0(t) = 1$, $g_1(t) = 2t$, $g_2(t) = 12t^2 - 4$, $g_3(t) = 120t^3 - 72t$, etc.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– Le terme de plus haut degré de g_k est $\dfrac{(2k)!}{k!}t^k$.
– Le polynôme g_k est de degré k, donc $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ forme une base de $\mathcal{P}_n$.

Lemme VI.2.2. *Quel que soit l'entier $k \geq 1$ et $0 \leq i \leq k-1$, le polynôme*

$$\frac{d^i}{dt^i}(t^2-1)^k,$$

admet 1 et -1 comme racines.

Démonstration - Il suffit de remarquer que si l'on note p le polynôme tel que :

$$p(t) = (t^2-1)^k = (t-1)^k(t+1)^k,$$

alors 1 et -1 sont racines d'ordre k de p, donc 1 et -1 sont racines d'ordre $k-1$ de p', ... , 1 et -1 sont racines d'ordre 1 de $p^{(k-1)}$. Ce qui démontre le résultat.

Ce lemme permet de démontrer un théorème fondamental sur lequel repose la particularité des formules de Gauss-Legendre.

Théorème VI.2.3. *Les polynômes de Legendre, sont orthogonaux sur $[-1, 1]$, ce qui veut dire que pour $i \neq k$ on a :*

$$\langle g_i,\, g_k \rangle = \int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t)\, dt = 0. \quad \text{(VI.2.1)}$$

Démonstration

Comme $g_0 = 1$ on a, pour $k \geq 1$:

$$0 = \int_{-1}^{1} g_0(t) g_k(t)\, dt = \int_{-1}^{1} g_k(t)\, dt = 0. \quad \text{(VI.2.2)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Corollaire VI.2.4. *Quel que soit $n \geq 1$, le polynôme g_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, soit*

$$\int_{-1}^{1} g_n(t)p(t)\,dt = 0,\ \forall p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Démonstration - Puisque $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ est une base de $\mathcal{P}_{n-1}$, il existe $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i(t),$$

donc

$$\int_{-1}^{1} g_n(t)p(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_{-1}^{1} g_n(t)g_i(t)\,dt = 0,$$

puisque $i < n$ et $\langle g_i\,,\,g_n\rangle = 0$.

Théorème VI.2.5. *Quel que soit $n \geq 1$, le polynôme g_n possède, dans l'intervalle $]-1,1[$, n racines distinctes de multiplicité 1.*

Démonstration

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VI.2.2 La méthode de Gauss-Legendre

Exercices :
Exercice VI.9

Exemples :
Exemple VI.4

Soit n entier supérieur ou égal à 1 fixé. On va grâce, aux polynômes de Legendre, obtenir une formule de quadrature sur n points qui est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2n-1$. Soit g_n le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre et soient $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ses n racines dans l'intervalle $]-1,1[$. On va approcher

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt,$$

par la formule

$$J(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i).$$

Théorème VI.2.6. *Le système linéaire*

$$\begin{bmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & \ldots & g_0(\xi_n) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & \ldots & g_1(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1}(\xi_1) & g_{n-1}(\xi_2) & \ldots & g_{n-1}(\xi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(VI.2.3)}$$

admet une solution unique. Si les poids $\{w_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont solutions de ce système linéaire alors quel que soit le polynôme p de degré inférieur ou égal à $2n-1$, on a

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i p(\xi_i). \qquad \text{(VI.2.4)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La formule de Gauss-Legendre à n points $J(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$ est donc d'ordre $2n-1$. On pourrait montrer de plus que l'erreur s'écrit

$$\exists \eta \in]-1,1[, \quad E(f) = I(f) - J(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left((2n)!\right)^3} f^{(2n)}(\eta).$$

Démonstration -

Montrons que la matrice du système est inversible, plus précisément on va montrer que les lignes sont linéairement indépendantes. Soient les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k g_k(\xi_i) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

Cela signifie que le polynôme (de degré au plus $n-1$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k g_k(t)$$

possède n racines distinctes et est donc identiquement nul. Par ailleurs, les polynômes $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\}$ sont linéairement indépendants donc $c_k = 0, \; \forall k$. Les lignes de la matrice sont donc indépendantes et le système (VI.2.3) admet une solution unique. On choisit $(w_1, w_2, ..., w_n)$ la solution de ce système.

On commence par démontrer que la relation (VI.2.4) est vérifiée pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. On remarque que les conditions (VI.2.3) signifient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i g_0(\xi_i) &= \int_{-1}^{1} g_0(t)\, dt = 2, \\
\sum_{i=1}^{n} w_i g_k(\xi_i) &= \int_{-1}^{1} g_k(t)\, dt = 0, \; 0 < k \leq n-1.
\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

D'autre part $\{g_0, g_1, ..., g_{n-1}\}$ est une base de $\mathcal{P}_{n-1}$, donc $\forall p \in \mathcal{P}_{n-1}, p = \sum_{k=0}^{n} a_k g_k$, on a donc

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} g_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n} w_i g_k(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{k=0}^{n} a_k g_k(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i p(\xi_i).$$

Soit maintenant un polynôme $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. La division *euclidienne* de p par g_n donne :

$$p(t) = g_n(t)q(t) + r(t),$$

on a deg $(p) \leq 2n-1$, donc deg $(q) \leq n-1$ et deg $(r) \leq n-1$. On a ainsi

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \int_{-1}^{1} g_n(t)q(t)\,dt + \int_{-1}^{1} r(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} r(t)\,dt = I(r), \end{aligned}$$

car g_n est orthogonal à q (polynôme de degré $\leq n-1$). D'autre part on a

$$\begin{aligned} J(p) &= \sum_{i=1}^{n} w_i p(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i [g_n(\xi_i)q(\xi_i) + r(\xi_i)], \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i r(\xi_i) = J(r), \end{aligned}$$

puisque $g_n(\xi_i) = 0$ (les ξ_i sont les racines de g_n). Or on a $I(r) = J(r)$ car les poids w_i ont été déterminés de façon à ce que la formule soit vraie pour les polynômes de degré $\leq n-1$. On a donc $I(p) = I(r) = J(r) = J(p)$.

On ne démontrera pas ici le résultat sur l'erreur.

Notons enfin que, tout comme les formules de Newton-Cotes, les formules de Gauss-Legendre peuvent servir à construire des formules de quadrature composées.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemples du chapitre VI

Exemple VI.1 Méthode des trapèzes

Soit l'intervalle de référence $[-1,+1]$ et soit φ une fonction définie sur cet intervalle. On cherche à approcher $I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt$ par une formule de quadrature à deux points, soit

$$J(\varphi) = w_0\varphi(-1) + w_1\varphi(1).$$

Notons p le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) tel que $p(-1) = \varphi(-1)$ et $p(1) = \varphi(1)$. Il s'écrit :

$$p(t) = \frac{1-t}{2}\varphi(-1) + \frac{t+1}{2}\varphi(1)$$

d'où, après calcul des deux intégrales,

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \varphi(-1) + \varphi(1).$$

Nous avons ainsi obtenu $w_0 = w_1 = 1$.

Nous aurions aussi pu obtenir les deux coefficients par la deuxième technique. Elle consiste à écrire que l'approximation doit être exacte pour les monômes 1 et t, soit

$$\int_{-1}^{1} p(t)\,dt = w_0 p(-1) + w_1 p(1),$$

pour $p(t) = 1$ et $p(t) = t$. Ceci donne deux équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui redonnent bien $w_0 = w_1 = 1$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple VI.2 Méthode des trapèzes sur un intervalle quelconque

On a vu dans l'exemple (VI.1) que la formule des trapèzes pour approcher $I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi$ est $J(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1)$

Si maintenant nous nous plaçons sur un intervalle quelconque $[a, b]$, nous arrivons par un changement de variable à :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

avec

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right).$$

Nous pouvons ainsi approcher cette dernière intégrale

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi \approx \frac{b-a}{2}(\varphi(-1) + \varphi(1)) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

La raison pour laquelle cette formule est dite des trapèzes est que l'on approche l'intégrale $I(f)$ par l'aire du trapèze représenté sur la figure VI.2.1.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple VI.2
Méthode des trapèzes sur un intervalle quelconque

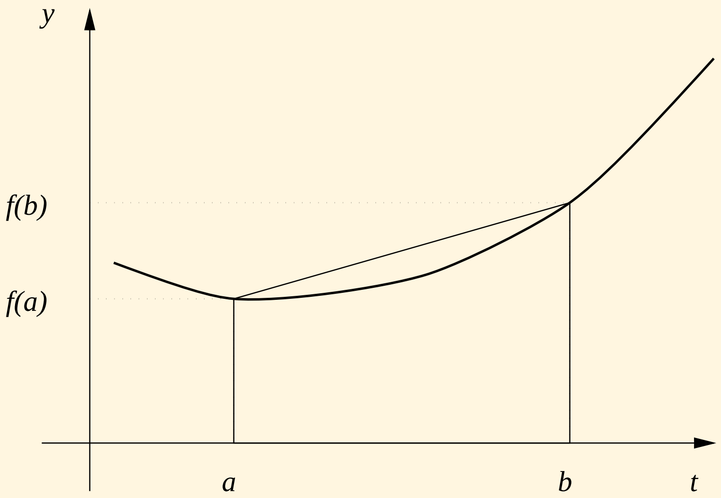


FIG. VI.2.1: Méthode des trapèzes

Exemple VI.3 Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes

Dans certains cas particuliers il est possible d'obtenir, à peu de frais, une estimation plus fine de l'erreur. Pour la méthode des trapèzes, on a

$$E(f) = \int_a^b (t-a)(t-b)\frac{f''(\xi(t))}{2}\,dt,$$

or sur $[a,b]$ le produit $(t-a)(t-b)$ ne change pas de signe d'où il existe $\eta \in [a,b]$ tel que

$$E(f) = \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)\,dt = -\frac{h^3}{12}f''(\eta),$$

où on a noté $h = b-a$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple VI.4 Exemple de formule de Gauss-Legendre

Établissons la formule de Gauss-Legendre à deux points : d'une part on a

$$g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1),$$

et donc comme racines

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

D'autre part le système pour déterminer les poids est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui donne $w_1 = w_2 = 1$. La formule est donc

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx J(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

On vérifie maintenant que cette formule est exacte pour $p \in \mathcal{P}_3$. On prend donc

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,$$

et on calcule

$$I(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = \frac{2}{3}b + 2d,$$

et on compare à ce que donne $J(p)$, soit

$$\begin{aligned} J(p) &= p\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{9}a + \frac{1}{3}b - \frac{\sqrt{3}}{3}c + d + \frac{\sqrt{3}}{9}a + \frac{1}{3}b + \frac{\sqrt{3}}{3}c + d, \\ &= \frac{2}{3}b + 2d. \end{aligned}$$

Les deux valeurs coïncident bien.

On aurait pu aussi, alternativement, après la détermination de w_1 et w_2, vérifier que la formule ainsi construite est exacte pour $f(t) = t^2$ et $f(t) = t^3$.

De toutes façons, il serait bon de s'assurer qu'un miracle ne permet pas que la formule soit encore exacte pour $f(t) = t^4$. Effectivement, un calcul rapide montre qu'il n'y a pas de miracle.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Documents du chapitre VI

Document VI.1 Approchée en quel sens ?

Le choix de la forme

$$\int_a^b f(t)\,dt \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(t_i). \tag{VI.2.5}$$

ne doit pas surprendre. En effet, rappelons comment est définie l'intégrale d'une fonction intégrable. On se donne une subdivision

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

de l'intervalle $[a, b]$ et pour chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, un point $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$. On introduit alors la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

qui représente, une valeur approchée de l'aire sous-tendue par la courbe $y = f(t)$ entre les points a et b. Posons $h = \max_{0 \leq i < n-1} |t_{i+1} - t_i|$. On dit que la fonction f est **Riemann-intégrable** sur l'intervalle $[a, b]$, si la limite

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

existe et est la même,

1. quel que soit le choix des points de subdivision t_i (pourvu que ce choix vérifie simplement la condition $h \to 0$),
2. et, quel que soit le choix des points ξ_i dans chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

La valeur de cette limite est l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Nous voyons ainsi, que chaque somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

donne une valeur approchée de l'intégrale. Nous voyons aussi que ces sommes sont bien de la forme (VI.2.5).

L'idéal serait d'avoir une valeur exacte pour toutes les fonctions susceptibles de nous intéresser, c'est-à-dire en fait pour toutes les fonctions Riemann-intégrables. C'est impossible, mais cette idée donne le principe de construction des méthodes les plus courantes et à partir desquelles beaucoup d'autres sont construites.

On demande ainsi dans un premier temps que les formules de quadrature soient exactes pour des classes de fonctions aussi larges que possible. Comme pour chaque formule on dispose d'un nombre fini de degrés de liberté, on pense vite aux polynômes. En effet, d'une part ils permettent effectivement de construire des formules puisque l'on connaît leurs primitives. D'autre part, ils sont denses dans l'espace des fonctions continues[3], ce qui permet d'espérer de bonnes propriétés des formules ainsi construites, pour cette large classe de fonctions.

Lorsque l'on a affaire à une fonction f n'appartenant pas à une classe pour laquelle on dispose de formules exactes, on voudra au moins pouvoir disposer d'une **famille** de formules $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} w_{in}\, f(t_{in}) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Nous construirons plus loin des familles de formule possédant cette propriété pour toute fonction Riemann-intégrable. Nous verrons aussi qu'il existe des familles de formules, qui bien qu'exactes pour les polynômes, ne possédent pas cette propriété.

[3]ce qui signifie en pratique que toute fonction continue peut être approchée aussi près que l'on veut par un polynôme

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

retour au cours

Document VI.2 Estimations a priori et a posteriori de l'erreur de quadrature

L'erreur obtenue pour la méthode du point milieu dans l'exercice (VI.3) et celle obtenue pour la méthode des trapèzes dans le paragraphe (Newton-Cotes-formules d'intégration) sont de même nature. Elles montrent par exemple que l'erreur sur un sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ tend vers 0 comme h_i^3, ce qui est intéressant. Cependant la présence d'un terme de la forme $f''(\xi_{M,i})$ (ou $f''(\xi_{T,i})$) interdit toute évaluation de la valeur de l'erreur. Par contre, si nous avons les deux estimations simultanément, à savoir

$$E_M^i(f) = \frac{h_i^3}{24} f''(\xi_{M,i}) \quad \text{et} \quad E_T^i(f) = -\frac{h_i^3}{12} f''(\xi_{T,i})$$

nous remarquons que pour h_i suffisamment petit, nous pouvons écrire

$$E_T^i(f) \simeq -2\, E_M^i(f)$$

Posons

$$\begin{aligned} I_{\text{exact}}^i(f) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\, dt, \\ I_M^i(f) &= h_i\, f(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}), \quad I_T^i(f) = \frac{h_i}{2}\ (f(t_i) + f(t_{i+1}))\,, \end{aligned}$$

Il vient alors

$$I^i(f) - I_T^i \simeq -2\,\left(I^i(f) - I_M^i(f)\right).$$

On en déduit une valeur approchée améliorée de $I^i(f)$:

$$I_i(f) \simeq \frac{I_T^i(f) + 2\, I_M^i(f)}{3} = \frac{h_i}{6}\ \left(f(t_i) + 4\, f(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}) + f(t_{i+1})\right)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

et surtout une estimation de l'erreur, soit

$$E_M^i(f) = I^i(f) - I_M^i(f) \simeq \frac{I_T^i(f) + 2\, I_M^i(f)}{3} - I_M^i(f) = \frac{I_T^i(f) - I_M^i(f)}{3}.$$

L'estimation ci-dessus est une estimation **a posteriori** : elle donne une 'valeur' calculable de l'erreur dès qu'ont été obtenues les valeurs approchées $I_M^i(f)$ et $I_T^i(f)$. Nous verrons au paragraphe suivant comment utiliser ces estimations pour obtenir des valeurs approchées à une précision donnée.

Concluons ce paragraphe en rappelant que toutes les estimations obtenues n'ont de sens que pour des fonctions à intégrer suffisamment régulières (concrètement de classe C^2 pour les formules de la moyenne et des trapèzes). En outre, les estimations a priori n'ont de sens que pour des h_i suffisamment petits pour que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur quand on assimile $\xi_{M,i}$ et $\xi_{T,i}$, mais pas trop petits quand même, sinon les erreurs de troncature de la machine deviennent prépondérantes et enlèvent tout sens à ces estimations obtenues sans les prendre en compte.

On donne un intervalle $[a, b]$, une fonction f dont on veut l'intégrale sur $[a, b]$ avec une erreur inférieure à ε. Pour ce faire on évalue une valeur approchée par la méthode du point milieu, puis par la méthode des trapèzes. On obtient ainsi une valeur de l'erreur. Si elle est inférieure à ϵ c'est terminé et on prend comme valeur approchée la valeur extrapolée. Sinon, on subdivise $[a, b]$ en deux et l'on calcule sur chacun des deux demi-intervalles avec une tolérance de $\varepsilon/2$ pour chacun d'eux, et ainsi de suite.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document VI.3 Démonstration du théorème VI.2.3

Il faut donc montrer que pour $0 \leq i < k$ on a

$$\int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t)\, dt = 0,$$

pour cela on intègre par parties

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t)\, dt &= \int_{-1}^{1} \frac{d^i}{dt^i}(t^2-1)^i \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k\, dt \\
&= \left[\frac{d^i}{dt^i}(t^2-1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}(t^2-1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k\, dt \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}}(t^2-1)^i \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t^2-1)^k\, dt,
\end{aligned}$$

car le premier terme est nul en vertu du Lemme VI.2.2. On peut donc intégrer $i+1$ fois par parties ce qui conduit à

$$\int_{-1}^{1} g_i(t) g_k(t)\, dt = (-1)^{i+1} \int_{-1}^{1} \frac{d^{2i+1}}{dt^{2i+1}}(t^2-1)^i \frac{d^{k-i-1}}{dt^{k-i-1}}(t^2-1)^k\, dt,$$

Or $\frac{d^{2i+1}}{dt^{2i+1}}(t^2-1)^i$ est identiquement nulle puisque $(t^2-1)^i$ est de degré $2i$ d'où le résultat.

Retour au théorème VI.2.3 ▲

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document VI.4 Démonstration du théorème VI.2.5

Tout d'abord il est clair que g_n change au moins une fois de signe dans l'intervalle $]-1,1[$ car sinon on aurait

$$\int_{-1}^{1} g_n(t)\,dt \neq 0,$$

ce qui est impossible, d'après (VI.2.2). Donc g_n change q fois de signe dans $]-1,1[$ et y possède donc q racines (correspondant à des changements de signe, donc de multiplicites impaires) : $\xi_1,\ldots,\xi_q$ (avec $1 \leq q \leq n$). Considérons alors le polynôme

$$\pi(t) = \prod_{j=1}^{q}(t-\xi_j).$$

Ce polynôme change lui aussi q fois de signe aux mêmes points que g_n et donc le produit $\pi(t)g_n(t)$ garde forcément un signe constant sur $]-1,1[$ ce qui entraîne

$$\int_{-1}^{1} g_n(t)\pi(t)\,dt \neq 0,$$

mais ceci n'est possible que si le degré de π, soit q, est égal à n (voir le corollaire VI.2.4), donc $q = n$.

Retour au théorème VI.2.5 ▲

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercices du chapitre VI

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.1

On note $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt,\ J(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(t_i).$

1. On choisit $w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt$, avec $\mathcal{L}_i$ polynôme de la base de Lagrange associée aux points $t_0, t_1, ..., t_n$.
   Montrer que alors $I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n$.
2. Réciproquement, on suppose que $I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n$, montrer que
   $w_i = \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt.$
3. Si on note $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ la base canonique de $\mathcal{P}_n$, montrer que

$$I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Leftrightarrow I(p_i) = J(p_i),\ i = 0, ..., n.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.2

On note $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt,\ J(f) = w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1)$.

1. Calculer $(w_i)_{i=0,1,2}$ pour que $I(p) = J(p)$ pour tous les polynômes de $\mathcal{P}_n$, n le plus grand possible. Quel est ce degré ?
2. En déduire une formule de quadrature pour $\int_{0}^{2} f(t)\, dt$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.3

La méthode du point milieu consiste à approcher

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt \text{ par } J(f) = (b-a)f(t_M), \text{ où } t_M = \frac{a+b}{2}.$$

1. Vérifier que cette formule est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
2. Quel est l'ordre de cette méthode ?
3. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, montrer que l'erreur est donnée par :

$$\exists \eta \in]a,b[, \quad E(f) = I(f) - J(f) = f''(\eta) \int_a^b \frac{(t-t_M)^2}{2}\,dt = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta).$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.4

On approche $I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi$ par la formule des rectangles $J(\varphi) = w\varphi(t_0)$. Etant donné t_0, calculer w pour que le degré d'exactitude soit le plus élevé possible. Donner le degré d'exactitude en fonction de t_0.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.5

Rappeler la formule des trapèzes et donner le degré d'exactitude de cette formule.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.6

Calculer les coefficients w_0, w_1, w_2 et w_3 de la formule de Simpson $3/8$ qui approche :
$I(\varphi) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,d\xi$ par $J(\varphi) = w_0\varphi(-1) + w_1\varphi(-\frac{1}{3}) + w_2\varphi(\frac{1}{3}) + w_3\varphi(1)$.
Donner le degré d'exactitude de cette formule.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.7

On cherche à approcher $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide d'une méthode composée à partir de la méthode de Simpson, on pose $h = \frac{b-a}{2M}$, $t_i = a + ih$. Montrer que

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(t_0) + 4\sum_{i=0}^{M-1} f(t_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(t_{2i}) + f(t_{2M})\right),$$

$$E(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta),\ \eta \in [a,b].$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.8

Montrer que les polynômes de Legendre $\{g_0, g_1, \ldots, g_n\}$ forment une base de $\mathcal{P}_n$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VI.9

Construire les formules de Gauss-Legendre à 1, 2 et 3 points. Vérifier le degré d'exactitude de ces formules.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de TD du chapitre 6

Exercice A.1.1

On cherche à déterminer une valeur approchée J de : $I = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ sous la forme

$$J = \alpha_0 f\left(\frac{-1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer le polynôme P qui interpole f aux points $\frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$. En déduire J.
2. Retrouver les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en écrivant que l'approximation doit être exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
3. Donner une approximation de $\int_a^b f(t)dt$ faisant intervenir :
$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$
4. Application : donner une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{\sin \pi t}{(t(1-t))^{3/2}} dt$
5. Etant donné une fonction de 2 variables, utiliser ce qui précède pour donner une valeur approchée de : $\int_a^b \int_c^d g(x,y)dxdy$ à l'aide de la valeur de g en certains points que l'on précisera.
6. Par cette méthode quelle approximation de : $\int_0^1 \int_0^1 xydxdy$ obtient-on ?

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1

Question 1	Aide 1	Aide 2		
Question 2	Aide 1	Aide 2		
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 6	Aide 1			

Exercice A.1.2

On désire approcher l'intégrale suivante

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt,$$

à l'aide de la formule ci-dessous :

$$J(f) = w_1 f(\xi_1).$$

1. Calculer le poids w_1 ainsi que la valeur de ξ_1 pour que la formule soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Représenter les domaines du plan dont $I(f)$ et $J(f)$ calculent l'aire.
2. Quel est l'entier maximal m pour lesquel on a $J(p) = I(p)$ pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à m ?
3. Utiliser l'approximation J pour approcher l'intégrale double d'une fonction de deux variables $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy$. Quelles sont les fonctions f pour lesquelles cette formule est exacte ?
   Réponse : $f(x,y) = a + xb(y) + yc(x)$.
4. Généraliser la formule pour approcher une intégrale du type : $\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dxdy$. Si on note $J(f)$ l'approximation obtenue Représenter sur une figure les domaines de $\mathbb{R}^3$ dont $I(f)$ et $J(f)$ calculent le volume.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2

Question 1	Aide 1
Question 2	Aide 1
Question 3	Aide 1
Question 4	Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.1.3

1. On définit $T_k(x) = \cos(k\text{Arccos } x)$ On admettra que :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour $k \geq 1$, T_k est un polynôme de degré k dont le coefficient de x^k est 2^{k-1}.

   (b) En déduire que $\{T_0, T_1, ..., T_{n-1}\}$ forme une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

   (c) On définit $r_i = \cos \dfrac{2i+1}{2n}\pi,\ 0 \leq i \leq n-1$. Montrer que $(T_n(r_i) = 0,\ 0 \leq i \leq n-1)$.
   En déduire que T_n admet n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$

2. On pose $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   On admettra que :

$$\text{si } i \neq j,\ \int_{-1}^{1} w(x)T_i(x)T_j(x)dx = 0. \tag{A.1.1}$$

   On cherche à approcher $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)f(x)dx$

   par : $J(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f(x_i)$, où les α_i et les x_i sont des coefficients réels.
   Soit P un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $2n-1$, on note $P = QT_n + R$ où Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n.

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3

(a) Montrer que $I(P) = I(R)$.

(b) On choisit $x_i = r_i$ (racines de T_n), montrer qu'alors $J(P) = J(R)$.

(c) On choisit les α_i pour que l'approximation soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Quelles équations doivent vérifier les coefficients α_i. Ces équations ont-elles une solution ? On ne demande pas de résoudre le système d'équations.

(d) Avec le choix précédent des coefficients α_i et x_i, montrer que $I(P) = J(P)$.

3. Application : on choisit $n = 2$

   (a) Calculer x_0 et x_1.

   (b) Calculer α_0 et α_1.

   (c) Utiliser ces résultats pour obtenir une valeur approchée de $A(g) = \int_{-1}^{1} g(x)dx$.

   (d) On définit $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

      i. Par la méthode précédente calculer une valeur approchée de $A(g)$.

      ii. Calculer la valeur exacte de $A(g)$.

      iii. Le résultat était-il prévisible ? Pourquoi ?

Exercice A.1.3

Question 1b	Aide 1
Question 1c	Aide 1 Aide 2
Question 2a	Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2b	Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2c	Aide 1 Aide 2
Question 2d	Aide 1 Aide 2
Question 3a	Aide 1
Question 3b	Aide 1
Question 3c	Aide 1 Aide 2
Question 3(d)i	Aide 1
Question 3(d)ii	Aide 1
Question 3(d)iii	Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

1. On désire approcher l'intégrale d'une fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ par une formule utilisant les valeurs de $f(t)$ et de sa dérivée $f'(t)$ en $t=0$ et $t=1$. Autrement dit on désire approcher

$$I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

par

$$J(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1).$$

(a) Montrer en le calculant qu'il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à trois tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} p(0) & = & f(0) \\ p(1) & = & f(1) \\ p'(0) & = & f'(0) \\ p'(1) & = & f'(1) \end{array}\right.$$

On pourra en particulier calculer les composantes de p dans la base canonique $\{a_i\}_{i=0..3}$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.

Réponse : $a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = -3f(0)+3f(1)-2f'(0)-f'(1), a_3 = 2f(0)-2f(1)+f'(1)+f'(0)$.

(b) Revoir le TD sur l'interpolation et plus particulièrement les polynômes de Hermite pour retrouver l'expression de p.

(c) On pose

$$J(f) = \int_0^1 p(t)\,dt = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1),$$

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

où $p(t)$ a été défini dans la question précédente. Déterminer les coefficients α_0, α_1, β_0 et β_1.

Réponse : $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}$.

(d) Retrouver les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ en écrivant que l'approximation doit être exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

2. Utiliser les résultat précédents pour approcher

$$\int_a^b g(t)\,dt,$$

où g est une fonction quelconque.

Réponse : $J(g) = \dfrac{b-a}{2}\left(g(a) + g(b) + \dfrac{b-a}{6}g'(a) - \dfrac{b-a}{6}g'(b)\right)$.

3. On veut évaluer l'erreur commise lorsque l'on approche $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ par $J(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(0) + \beta_1 f'(1)$.

(a) Rappeler l'expression de $e(t) = f(t) - p(t)$ que l'on a déterminée dans l'exercice sur les polynômes de Hermite dans le TD sur l'interpolation.

(b) En déduire qu'il existe c compris entre 0 et 1 tel que $E(f) = I(f) - J(f) = \frac{1}{720} f^{(4)}(c)$.

4. (a) Rappeler la formule classique de Newton-Cotes qui approche $I(f)$ par $\widehat{J}(f) = \beta_0 f(0) + \beta_1 f(\frac{1}{3}) + \beta_2 f(\frac{2}{3}) + \beta_3 f(1)$, donner l'expression de $\hat{E}(f) = I(f) - \hat{J}(f)$.

(b) quelle est la meilleure des approximations $J(f)$ ou $\hat{J}(f)$?

5. Application numérique, on prend la fonction

$$f(t) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4

(a) Utiliser ce qui précède pour calculer un majorant de $E(f)$ et un majorant de $\hat{E}(f)$.

(b) Calculer $I(f)$, $J(f)$, $\hat{J}(f)$, $E(f)$, $\hat{E}(f)$.
Comparer.

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1
Question 1c Aide 1
Question 1d Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4
Question 3a Aide 1
Question 3b Aide 1 Aide 2
Question 4a Aide 1 Aide 2
Question 4b Aide 1
Question 5a Aide 1
Question 5b Aide 1

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

1. Si $p \in \mathcal{P}_n$, alors $\forall t\ p(t) = \sum_{i=0}^{n} p(t_i)\mathcal{L}_i(t)$, donc

$$I(p) = \int_a^b p(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} p(t_i) \int_a^b \mathcal{L}_i(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} w_i p(t_i) = J(p).$$

2.

$$I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(\mathcal{L}_j) = J(\mathcal{L}_j), j = 0, ..., n,$$

   or

$$I(\mathcal{L}_j) = \int_a^b \mathcal{L}_j(t)\,dt, J(\mathcal{L}_j) = \sum_{i=0}^{n} w_i \mathcal{L}_j(t_i) = w_j,$$

   d'où le résultat.

3. $I(p) = J(p),\ \forall p \in \mathcal{P}_n \Rightarrow I(p_i) = J(p_i),\ i = 0, ..., n$

   Réciproquement si $p \in \mathcal{P}_n,\ \ p = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i$, donc

$$I(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b p_i(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} a_i I(p_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i).$$

   D'autre part :

$$J(p) = \sum_{j=0}^{n} w_j p(t_j) = \sum_{j=0}^{n} w_j \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(t_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} w_j a_i p_i(t_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i J(p_i).$$

   Ce qui termine de démontrer l'égalité.

Retour à l'exercice ▲

1. Si on note p_i les polynômes de la base canonique $p_i(t) = t^i$, on écrit

$$\left\{\begin{array}{llll} I(p_0) = J(p_0) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} dt = w_0 + w_1 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_1 + w_2 = 2 \\ I(p_1) = J(p_1) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} t dt = -w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 - w_2 = 0 \\ I(p_2) = J(p_2) & \Leftrightarrow & \int_{-1}^{1} t^2 dt = w_0 + w_2 & \Leftrightarrow w_0 + w_2 = \frac{2}{3} \end{array}\right. .$$

   Pour que ces 3 relations soient vérifiées, il faut que $w_0 = w_2 = \frac{1}{3}, w_1 = \frac{4}{3}$
   Vérifions avec ces coefficients si $I(p_3) = J(p_3)$, après calcul, on obtient $I(p_3) = J(p_3) = 0$, on continue !
   On calcule $I(p_4) = \frac{2}{5}, J(p_4) = \frac{2}{3}$.
   La formule construite (qui s'appelle la formule de Simpson) est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
   On aurait pu calculer les coefficients w_i en écrivant $w_i = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_i(t)dt$ où $\mathcal{L}_i$ est le polynôme de la base de Lagrange.
2. $$\int_0^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(u+1)du, \text{où } u = t - 1$$

   Si on pose $g(u) = f(u+1)$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(u)du$ est approchée par

$$\frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1) = \frac{1}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2)$$

   d'où la formule.

Retour à l'exercice ▲

1. On vérifie que $I(p_0) = J(p_0) = b - a,\ I(p_1) = J(p_1) = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$
2. L'ordre est donc au moins égal à 1, on calcule

$$I(p_2) = \frac{b^3 - a^3}{3},\ J(p_2) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$I(p_2) \neq J(p_2)$, donc la formule est d'ordre 1.

3. La formule de Taylor est :

$$f(t) = f(t_M) + (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t-t_M)^2}{2}f''(c_t)$$

$$J(f) = (b-a)f(t_M) = \int_a^b f(t_M)dt$$

donc

$$E(f) = I(f) - J(f) = \int_a^b (f(t) - f(t_M))dt = \int_a^b (t - t_M)f'(t_M) + \frac{(t-t_M)^2}{2}f''(c_t)dt$$

or $\displaystyle\int_a^b (t - t_M)dt = 0$, donc

$$E(f) = \int_a^b \frac{(t-t_M)^2}{2}f''(c_t)dt = f''(\eta)\int_a^b \frac{(t-t_M)^2}{2}dt = f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{24}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice VI.4

$I(p_0) = 2,\ J(p_0) = w$, donc il faut que $w = 2$.

$I(p_1) = 0,\ J(p_1) = 2t_0$, donc

- si $t_0 \neq 0, I(p_1) \neq J(p_1)$, l'ordre est 0.
- si $t_0 = 0, I(p_1) = J(p_1)$, on a de plus $I(p_2) = \dfrac{2}{3}, J(p_2) = 0$, donc l'ordre est 1.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice VI.5

On approche $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ par $J(f) = f(-1) + f(1)$.

On calcule :

$$I(p_0) = 2,\ J(p_0) = 2,$$
$$I(p_1) = 0,\ J(p_1) = 0,$$
$$I(p_2) = \frac{2}{3},\ J(p_2) = 2,$$

Donc l'ordre est 1.

Retour à l'exercice ▲

On calcule

$$I(p_0) = 2,\ J(p_0) = w_0 + w_1 + w_2 + w_3,$$

$$I(p_1) = 0,\ J(p_1) = -w_0 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 + w_3,$$

$$I(p_2) = \frac{2}{3},\ J(p_2) = w_0 + \frac{1}{9}w_1 + \frac{1}{9}w_2 + w_3,$$

$$I(p_3) = 0,\ J(p_3) = -w_0 - \frac{1}{27}w_1 + \frac{1}{27}w_2 + w_3,$$

On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues.
En remplaçant la 4ème équation par la 4ème moins la 2ème, on montre que $w_1 = w_2$.
En remplaçant la 3ème équation par la 3ème moins la 1ère, on montre que $w_1 = w_2 = \frac{3}{4}$.
On résout alors les deux premières équations, on obtient :

$$w_0 = w_3 = \frac{1}{4},\ w_1 = w_2 = \frac{3}{4}.$$

On calcule $I(p_4)$ et $J(p_4)$, ces deux valeurs sont distinctes, donc l'ordre vaut 3.

Retour à l'exercice ▲

En applicant la méthode de Simpson sur chacun des intervalles $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, on obtient

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2) + f(t_2) + 4f(t_3) + f(t_4) + \ldots + f(t_{2M-2}) + 4f(t_{2M-1}) + f(t_{2M})\right),$$

ce qui donne le résultat en regroupant. De même en sommant les erreurs, on obtient :

$$E(f) = -\frac{h^5}{90}\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \ldots + f^{(4)}(\eta_M)\right).$$

On applique le théorème de la valeur intermédiaire pour affirmer qu'il existe η tel que

$$f^{(4)}(\eta) = \frac{\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \ldots + f^{(4)}(\eta_M)\right)}{M}.$$

On a donc

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} M f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\eta).$$

Retour à l'exercice ▲

Les polynômes g_i sont de degré i, ils forment donc une famille libre, en effet notons $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_i(t)$, si p est le polynôme nul, alors le coefficient de t^n est nul, or ce coefficient vaut $\lambda_n \frac{(2n)!}{n!}$, en effet les polynômes $g_0, g_1, ..., g_{n-1}$ sont de degré inférieur ou égal à $n-1$. On en déduit donc que $\lambda_n = 0$.

On fait un raisonnement similaire pour le coefficient de t^{n-1}, on montre que $\lambda_{n-1} = 0$, on recommence et on montre que $\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = ... = \lambda_0 = 0$.

On vient donc de montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = \lambda_{n-1} = ... = \lambda_0 = 0.$$

Donc la famille est $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ est libre.

La dimension de $\mathcal{P}_n$ est égal à $n+1$, donc $\{g_0, g_1, ..., g_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Retour à l'exercice ▲

1. Formule à un point :
   $g_1(t) = 2t$, donc $\xi_1 = 0$.
   On doit résoudre $g_0(\xi_1)w_1 = 2$ donc $w_1 = 2$.
   On retrouve la formule des rectangles avec $t_0 = 0$ vue dans l'exercice VI.4 :

$$J(f) = 2f(0).$$

   On a déja montré que l'ordre est égal à 1.
2. Formule à deux points :
   $g_2(t) = 12t^2 - 4 = 4(3t^2 - 1)$, donc $\xi_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \xi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   donc $w_1 = w_2 = 1$, d'où :

$$J(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

   Comme prévu on a $I(p_0) = J(p_0), I(p_1) = J(p_1), I(p_2) = J(p_2), I(p_3) = J(p_3)$,
   après calculs, on obtient que $I(p_4) \neq J(p_4)$, l'ordre est donc égal à 3
3. Formule à trois points :
   $g_3(t) = t(120t^2 - 72)$, donc $\xi_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}},\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.
   On doit résoudre :

$$\begin{pmatrix} g_0(\xi_1) & g_0(\xi_2) & g_0(\xi_3) \\ g_1(\xi_1) & g_1(\xi_2) & g_0(\xi_3) \\ g_2(\xi_1) & g_2(\xi_2) & g_2(\xi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & 2\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{16}{5} & -4 & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc $w_1 = w_3 = \frac{5}{9}, w_2 = \frac{8}{9}$, d'où :

$$J(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Comme prévu on a $I(p_0) = J(p_0), I(p_1) = J(p_1), I(p_2) = J(p_2), I(p_3) = J(p_3), I(p_4) = J(p_4), I(p_5) = J(p_5)$, après calculs, on obtient que $I(p_6) \neq J(p_6)$, l'ordre est donc égal à 5

Retour à l'exercice ▲

On utilise les polynômes de Lagrange et on obtient :

$$P(t) \quad = \quad 2\,t\left(t-\frac{1}{2}\right)\,f\left(-\frac{1}{2}\right)+(-4)\,\left(t+\frac{1}{2}\right)\,\left(t-\frac{1}{2}\right)\,f\,(0)+2\,\left(t+\frac{1}{2}\right)\,t\,f\left(\frac{1}{2}\right)$$

En déduire J.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.1.1

$$J = \int_{-1}^{1} P(t)dt = \underbrace{\frac{4}{3}}_{=\alpha_0} f\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{-\frac{2}{3}}_{=\alpha_1} f(0) + \underbrace{\frac{4}{3}}_{=\alpha_2} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Retour à l'exercice ▲

On écrit que l'approximation est exacte c'est à dire que $J = I$ pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2, c'est à dire que $J = I$ pour les polynômes de la base $(1,\, t,\, t^2)$.

Ecrire les équations obtenues.

Retour à l'exercice ▲

$$J = I \iff \alpha_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \text{ pour } : \begin{cases} f(t) = 1 \\ f(t) = t \\ f(t) = t^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_0 & +\alpha_1 & +\alpha_2 & = 2 \\ -\frac{1}{2}\alpha_0 & & +\frac{1}{2}\alpha_2 & = 0 \\ \frac{1}{4}\alpha_0 & & +\frac{1}{4}\alpha_2 & = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \alpha_0 = \alpha_2 = \frac{4}{3} \text{ et } \alpha_1 = -\frac{2}{3}.$$

On retrouve bien sûr les mêmes coefficients.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.1

On utilise un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale de -1 à 1.

Retour à l'exercice ▲

On utilise un changement de variable affine :

$$\begin{cases} u=-1, & t=a \\ u=1, & t=b \end{cases} \Longrightarrow t = b\frac{u+1}{2} - a\frac{u-1}{2} = u\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = \phi(u) \;\Rightarrow\; dt = \frac{b-a}{2}\,du$$

Que devient $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par ce changement de variable ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.1.1

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\phi(u))\,du$$

Donner une approximation de l'intégrale de droite.

Retour à l'exercice ▲

$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\phi(u))\, du$ **est approchée par**

$$\frac{b-a}{2}\left[\frac{4}{3}\, f\left(\phi\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2}{3}\, f\left(\phi(0)\right) + \frac{4}{3}\, f\left(\phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] = \frac{b-a}{3}\left[2\, f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\, f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.1.1

$$\int_a^b \int_c^d g(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b I(y)\,dy, \textbf{avec} I(y) = \int_c^d g(\overset{\downarrow}{x},y)\,dx$$

Donner une approximation de $I(y)$.

Retour à l'exercice ▲

$I(y)$ est approchée par

$$\frac{d-c}{3}\left[2\,g\left(\frac{3c+d}{4},y\right)-g\left(\frac{c+d}{2},y)+2\,g(\frac{c+3d}{4},y\right)\right]$$

En déduire une approximation de $\displaystyle\int_a^b I(y)\,dy$

Retour à l'exercice ▲

$\int_a^b I(y)\,dy$ est approchée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{3}\,\frac{d-c}{3} && \left[2\left(2\,g\left(\frac{3c+d}{4},\frac{3a+b}{4}\right)-g\left(\frac{3c+d}{4},\frac{a+b}{2}\right)+2\,g\left(\frac{3c+d}{4},\frac{a+3b}{4}\right)\right)\right.\\
& && -\left(2\,g\left(\frac{c+d}{2},\frac{3a+b}{4}\right)-g\left(\frac{c+d}{2},\frac{a+b}{2}\right)+2\,g\left(\frac{c+d}{2},\frac{a+3b}{4}\right)\right)\\
& && \left.+\,2\left(2\,g\left(\frac{c+3d}{4},\frac{3a+b}{4}\right)-g\left(\frac{c+3d}{4},\frac{a+b}{2}\right)+2\,g\left(\frac{c+3d}{4},\frac{a+3b}{4}\right)\right)\right]\\
=\ &\frac{b-a}{3}\,\frac{d-c}{3} && [4g(M_1)-2g(M_2)+4g(M_3)-2g(M_4)+g(M_5)\\
& && -2g(M_6)+4g(M_7)-2g(M_8)+4g(M_9)]\,,
\end{aligned}$$

Où l'on a défini les 9 points :

$M_1=\left(\frac{3c+d}{4},\frac{3a+b}{4}\right)$, $M_2=\left(\frac{3c+d}{4},\frac{a+b}{2}\right)$, $M_3=\left(\frac{3c+d}{4},\frac{a+3b}{4}\right)$,
$M_4=\left(\frac{c+d}{2},\frac{3a+b}{4}\right)$, $M_5=\left(\frac{c+d}{2},\frac{a+b}{2}\right)$, $M_6=\left(\frac{c+d}{2},\frac{a+3b}{4}\right)$
$M_7=\left(\frac{c+3d}{4},\frac{3a+b}{4}\right)$, $M_8=\left(\frac{c+3d}{4},\frac{a+b}{2}\right)$, $M_9=\left(\frac{c+3d}{4},\frac{a+3b}{4}\right)$

Vous pouvez représenter ces 9 points sur le rectangle $[c,d]\times[a,b]$.

Retour à l'exercice ▲

On doit retouver la **valeur exacte** car l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 en x et en y.

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4}$$

On peut calculer J avec l'approximation précédente, on doit trouver $J = \frac{1}{4}$.

Retour à l'exercice ▲

On écrit

$$I(p_0) = J(p_0) \Leftrightarrow 2 = w_1$$

$$I(p_1) = J(p_1) \Leftrightarrow 0 = w_1\xi_1$$

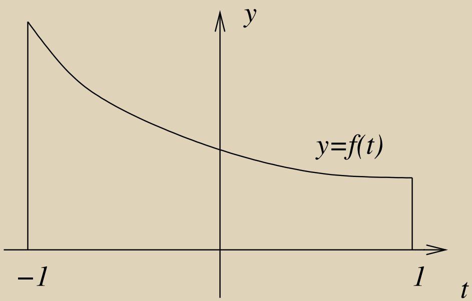
On a donc

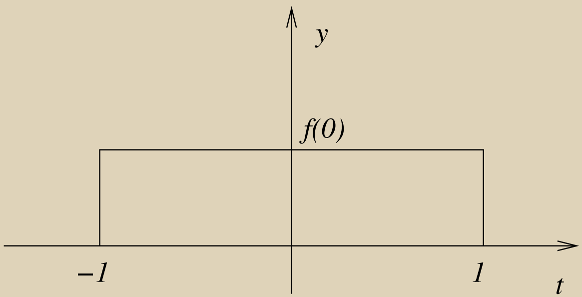
$$w_1 = 2, \xi_1 = 0, J(f) = 2f(0)$$

on retrouve la méthode du point milieu déjà étudiée dans l'exercice VI.3 .

$I(f)$ est l'aire de la surface limitée par les droites d'équation $t = -1, t = 1, y = 0$ et la courbe d'équation $y = f(t)$.

$J(f)$ est l'aire du rectangle limité par les droites $t = -1, t = 1, y = 0, t = f(0)$.





Retour à l'exercice ▲

On a $m \geq 1$.

D'autre part on calcule $I(p_2) = \frac{2}{3}, J(p_2) = 0$, donc ce n'est pas exact pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Donc $m = 1$.

Retour à l'exercice ▲

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \approx \int_{-1}^{1}(2f(0,y))\,dy \approx 4f(0,0).$$

$\int_{-1}^{1} f(x,y)dx = 2f(0,y)$ si $f(x,y)$ est un polynôme degré inférieur ou égal à 1 en x, ici y joue le rôle d'un paramètre, cette première intégrale sera donc exacte si $f(x,y) = \alpha_1(y) + x\alpha_2(y)$ où α_1 et α_2 sont des fonctions quelconques, on a donc pour ces fonctions f

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)dx = 2f(0,y) = 2\alpha_1(y)$$

et donc

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\alpha_1(y)dy$$

Si maintenant $\alpha_1(y) = \beta_1 + \beta_2 y$, on a

$$\int_{-1}^{1}\alpha_1(y)dy = 2\alpha_1(0)$$

donc si $f(x,y) = \beta_1 + \beta_2 y + x\alpha_2(y)$, on a

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\alpha_1(y)dy = 4\alpha_1(0) = 4f(0,0)$$

On vient de montrer que l'approximation est exacte pour les fonctions qui s'écrivent $f(x,y) = \beta_1 + \beta_2 y + x\alpha_2(y)$.

x et y jouent des rôles similaires, on aurait pu échanger l'ordre des intégrations en x et en y, l'approximation est donc exacte pour les fonctions qui s'écrivent $f(x,y) = \beta_3 + \beta_4 x + y\alpha_3(x)$, donc pour les sommes de telles fonctions.

La formule est donc exacte pour toutes les fonctions qui s'écrivent

$$f(x,y) = \beta + x\alpha(y) + y\gamma(x).$$

On a noté $\beta = \beta_1 + \beta_3, \alpha(y) = \beta_4 + \alpha_2(y), \gamma(x) = \beta_2 + \alpha_3(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.1.2

Faites un changement de variables afin de ramener $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$ à une intégrale $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(u,v)dudv$

Retour à l'exercice ▲

On pose

$$x = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2},\; y = \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy &= \frac{b-a}{2} \int_a^b \left(\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, y \right) du \right) dy \\
&= \frac{b-a}{2} \times \frac{d-c}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2} \right) du \right) dv
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

On pose

$$g(u,v) = f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}\right)$$

on a donc

$$g(0,0) = f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}, \frac{d-c}{2}v + \frac{d+c}{2}\right) du\right) dv \approx 4f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$$

d'où

$$I(f) = \int_{a}^{b}\left(\int_{c}^{d} f(x,y)dx\right) dy$$

est approché par

$$J(f) = (b-a)(d-c)f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right).$$

$I(f)$ est le volume du domaine limité par les plans $x=c, x=d, y=a, y=b, z=0$ et la surface d'équation $z=f(x,y)$.

$J(f)$ est le volume du parallépipède limité par les plans $x=c, x=d, y=a, y=b, z=0, z=f\left(\frac{b+a}{2}, \frac{d+c}{2}\right)$, voir figure A.1.1, on a noté

$$x_m = \frac{c+d}{2}, y_m = \frac{a+b}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

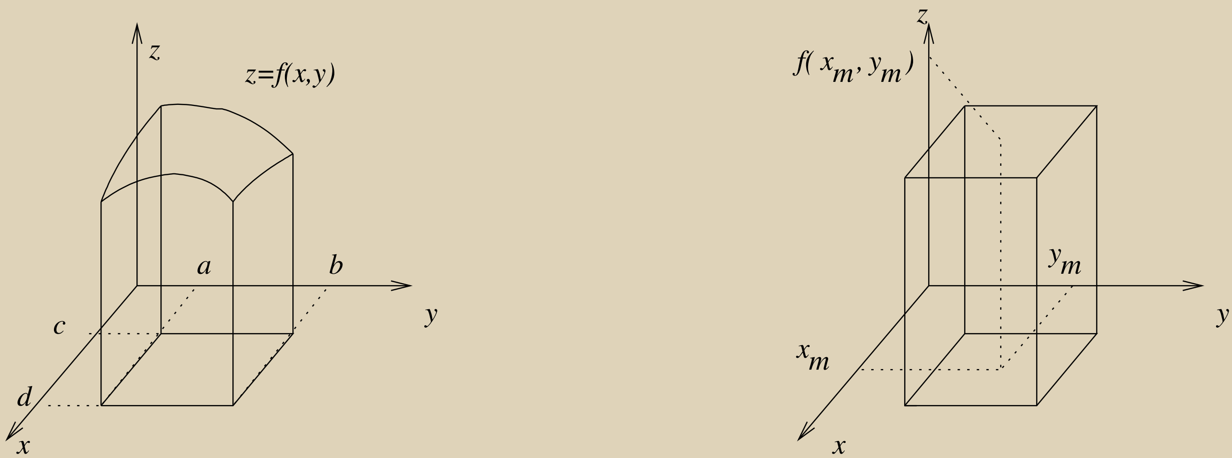


FIG. A.1.1: Interprétation graphique

On montre que la famille est libre, le nombre de polynômes est égal à la dimension de l'espace vectoriel, donc il s'agit d'une base.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.1.3

$$T_n(r_i) = \cos\left(n \textbf{ Arccos } \cos\frac{2i+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(n\frac{2i+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2i+1}{2}\pi\right) = \cos\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

montrer que les r_i sont distincts et appartiennent à $[-1, 1]$.

Retour à l'exercice ▲

Si on note $\alpha_i = \frac{2i+1}{2n}\pi$, on a

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{n-1} < \pi$$

donc

$$1 > \cos\alpha_0 > \cos\alpha_1 > ... > \cos\alpha_{n-1} > -1,$$

$r_0, r_1, ..., r_{n-1}$ sont donc distincts (et ordonnés) et appartiennent à $]-1, 1[$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.1.3

La démonstration est similaire à celle faite pour l'intégration de Gauss Legendre, voir le paragraphe Gauss-Legendre - intégration .

Retour à l'exercice ▲

$$I(P)=\int_{-1}^{1} w(x)Q(x)T_n(x)dx+\int_{-1}^{1} w(x)R(x)dx$$

On a

$$\int_{-1}^{1} w(x)Q(x)T_n(x)dx=0,$$

vous comprenez pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Puisque le degré de P est inférieur ou égal à $2n-1$ et que le degré de T_n est égal à n, alors le degré du polynôme quotient Q est inférieur ou égal $n-1$, donc Q s'écrit $Q = a_0T_0 + a_1T_1 + \ldots + a_{n-1}T_{n-1}$, donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} w(x)Q(x)T_n(x)dx &= \int_{-1}^{1} w(x)(a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \ldots + a_{n-1}T_{n-1}(x))T_n(x)dx \\ &= a_0\int_{-1}^{1} w(x)T_0(x)T_n(x)dx + a_1\int_{-1}^{1} w(x)T_1(x)T_n(x)dx + \ldots + a_{n-1}\int_{-1}^{1} w(x)T_{n-1}(x)T_n(x)dx = 0\end{aligned}$$

On a utilisé la relation A.1.1.

On a donc

$$I(P) = \int_{-1}^{1} w(x)R(x)dx = I(R).$$

Retour à l'exercice ▲

Ecrivez $J(P)$, $J(R)$ explicitez $P(r_i)$ et n'oubliez pas la dénition des r_i.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.1.3

N'oubliez pas que $P = QT_n + R$ et que $T_n(r_i) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2b, Exercice A.1.3

$$J(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P(r_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (Q(r_i) T_n(r_i) + R(r_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i R(r_i) = J(R)$$

Retour à l'exercice ▲

Comme d'habitude on écrit

$$I(p_0) = J(p_0), I(p_1) = J(p_1), ..., I(p_{n-1}) = J(p_{n-1}),$$

où $\{p_0, p_1, ..., p_{n-1}\}$ est la base canonique de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Ecrivez le système linéaire à résoudre et montrez qu'il a une solution unique.

Retour à l'exercice ▲

On doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_0 & r_1 & \dots & r_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_0^{n-1} & r_1^{n-1} & \dots & r_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} w(x)dx \\ \int_{-1}^{1} xw(x)dx \\ \dots \\ \int_{-1}^{1} x^{n-1}w(x)dx \end{pmatrix}$$

Puisque les r_i sont distincts la matrice du système est une matrice de Vander monde inversible.

Retour à l'exercice ▲

Avec le choix des α_i précédents, on a $I(R) = J(R)$, vous comprenez pourquoi ?
Il suffit ensuite de recoller tous les morceaux...

Retour à l'exercice ▲

R est le reste de la division par le polynôme T_n de degré n, donc le degré de R est inférieur ou égal à $n-1$, d'après le choix des α_i, l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieurs ou égal à $n-1$, donc $I(R) = J(R)$.

On a montré successivement $I(P) = I(R), J(P) = J(R), I(R) = J(R)$ On a donc

$$I(P) = J(P).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.1.3

$$x_0 = r_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_1 = r_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

On doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\textbf{Arcsin}\ (x)]_{-1}^{1} = \pi \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_0 - \alpha_1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3c, Exercice A.1.3

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}g(x)dx$$

Il suffit de poser $f(x) = \sqrt{1-x^2}g(x)$ **et de calculer** $J(f)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3c, Exercice A.1.3

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2}\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3(d)i, Exercice A.1.3

$$A(g) \approx \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3(d)ii, Exercice A.1.3

$$A(g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Dans ce cas on a $f(x) = 1-x^2$, or l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2\times 2-1 = 3$, il était donc prévisible que l'on obtiendrait le résultat exact.

Retour à l'exercice ▲

Soit $p(t)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 donc p s'écrit sous la forme :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Calculer $p(0), p(1), p'(0), p'(1)$.
Ecrire les conditions et en déduire les coefficients a_i.

Retour à l'exercice ▲

$$\begin{cases} p(0) = a_0 = f(0) \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1) \\ p'(0) = a_1 = f'(0) \\ p'(1) = a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 = f'(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ a_2 = -3\,f(0) + 3\,f(1) - 2\,f'(0) - f'(1) \\ a_3 = 2\,f(0) - 2\,f(1) + f'(0) + f'(1) \end{cases}$$

D'où l'expression de $p(t)$.

$$p(t) = f(0) + f'(0)\,t + (-3\,f(0) + 3\,f(1) - 2\,f'(0) - f'(1))\,t^2 + (2\,f(0) - 2\,f(1) + f'(0) + f'(1))\,t^3$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.1.4

Dans l'exercice 5 du TD 5, question 2, nous avons

$$p(t) \quad = \quad f(0)\,\underbrace{(t-1)^2\,(2\,t+1)}_{q_0(t)} + f(1)\,\underbrace{t^2\,(-2\,t+3)}_{q_1(t)} + f'(0)\,\underbrace{(t-1)^2\,t}_{q_2(t)} + f'(1)\,\underbrace{t^2\,(t-1)}_{q_3(t)}$$

En développant, on obtiendrait les mêmes coefficients a_i qu'à la question (a).

Retour à l'exercice ▲

On a

$$\alpha_0 = \int_0^1 q_0(t)dt = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \int_0^1 q_1(t)dt = \frac{1}{2},$$

$$\beta_0 = \int_0^1 q_2(t)dt = \frac{1}{12}, \quad \beta_1 = \int_0^1 q_3(t)dt = -\frac{1}{12}.$$

Retour à l'exercice ▲

On écrit que l'approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, c'est dire que $J(f) = I(f)$ pour les polynômes définis par

$$f(t) = 1,\ f(t) = t,\ f(t) = t^2,\ f(t) = t^3, \forall t.$$

Ecrire les équations obtenues et les résoudre.

Retour à l'exercice ▲

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 & = 1 \\ \quad \alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = \dfrac{1}{2} \\ \quad \alpha_1 + \quad +2\,\beta_1 = \dfrac{1}{3} \\ \quad \alpha_1 + \quad +3\,\beta_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \beta_0 = -\beta_1 = \frac{1}{12}.$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

Retour à l'exercice ▲

On utilise un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale de 0 à 1.

Retour à l'exercice ▲

$$\begin{cases} u = 0, & t = a \\ u = 1, & t = b \end{cases} \Longrightarrow t = bu + a(1-u) = (b-a)\,u + a = \psi(u) \ \Rightarrow \ dt = (b-a)du$$

Que devient $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ **par ce changement de variable ?**

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.1.4

$$\int_a^b g(t)dt = (b-a)\int_0^1 g(\psi(u))\,du = (b-a)\int_0^1 g((b-a)\,u+a)\,du = (b-a)\int_0^1 f(u)\,du$$

On a posé $f(u) = g((b-a)u+a)$.

Donner une approximation de l'intégrale de droite. Pour ce faire, on doit calculer $f'(u)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.1.4

$f'(u) = (b-a)g'((b-a)u+a)$.

$$\int_a^b g(t)dt = (b-a)\int_0^1 f(u)\,du$$

est approché par :

$$(b-a)\left[\frac{1}{2}\,f(0)+\frac{1}{2}\,f(1)+\frac{1}{12}\,f'(0)-\frac{1}{12}\,f'(1)\right] = \frac{(b-a)}{2}\left[g(a)+g(b)+\frac{(b-a)}{6}\,g'(a)-\frac{(b-a)}{6}\,g'(b)\right].$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.1.4

$$\forall t \in [0,1], \exists \xi(t) \in [0,1],\ e(t) = t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!}$$

Retour à l'exercice ▲

$$E(f) = \int_0^1 e(t)dt = \int_0^1 t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!} dt$$

pensez à utiliser le deuxième théorème de la moyenne.

Retour à l'exercice ▲

$t^2(t-1)^2$ garde un signe constant donc on peut écrire

$$\exists t^* \in [0,1], \int_0^1 t^2(t-1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi(t))}{4!} dt = \frac{f^{(4)}(\xi(t^*))}{4!} \int_0^1 t^2(t-1)^2 dt.$$

On peut poser $c = \xi(t^*)$, puis on calcule l'intégrale, on obtient

$$\exists c \in [0,1],\ E(f) = \frac{f^{(4)}(c)}{720}$$

Retour à l'exercice ▲

Revoyez le paragraphe de cours Newton-Cotes-formules d'intégration , que vaut h ?

Retour à l'exercice ▲

On obtient $h = \frac{1}{3}$,

$$\widehat{J}(f) = \frac{1}{8}f(0) + \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8}f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8}f(1).$$

$$\exists \hat{c} \in [0,1],\ \widehat{E}(f) = -\frac{1}{6480}f^{(4)}(\hat{c}).$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4b, Exercice A.1.4

Si l'on suppose que la dérivée quatrième varie peu, l'approximation à l'aide des formules de Newton-Cotes est meilleure.

Retour à l'exercice ▲

$$|f^{(4)}(t)| = \left|\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^5$$

donc

$$|E(f)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \times \frac{1}{720} \approx 0.0132821,$$

$$|\widehat{E}(f)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \times \frac{1}{6480} \approx 0.0014758.$$

Retour à l'exercice ▲

Ici on sait calculer $I(f)$

$$I(f) = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt = \left[\sin \frac{\pi}{2} t\right]_0^1 = 1.$$

On calcule $J(f)$ et $\widehat{J}(f)$

$$J(f) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12} \times \frac{\pi^2}{4} \approx 0.99101492$$

$$\widehat{J}(f) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}\right) \approx 1.0010049$$

Puisque $f^{(4)}$ est positive on trouve bien que $J(f)$ approche $I(f)$ par défaut, alors que $\widehat{J}(f)$ approche $I(f)$ par excès.

$$E(f) \approx 0.00898508,\ \widehat{E}(f) \approx -0.0010049$$

On retrouve entre $E(f)$ et $\widehat{E}(f)$ à peu près le rapport $-\frac{6480}{720}$.

Retour à l'exercice ▲