

Analyse numérique élémentaire

Chapitre 7 : Résolution numérique des équations différentielles

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Juin 2007



Chapitre VII

Équations différentielles

VII.1	Principes généraux de résolution	3
VII.2	Les schémas à un pas	13
VII.3	Les schémas multi-pas	29
	Exemples du chapitre VII	39
	Documents du chapitre VII	46
	Exercices du chapitre VII	54

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.1 Principes généraux de résolution

VII.1.1 Motivations	4
VII.1.2 Éléments de théorie des équations différentielles	6
VII.1.3 Principe des méthodes numériques	10

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.1 Motivations

Exercices :
[Exercice VII.1](#)

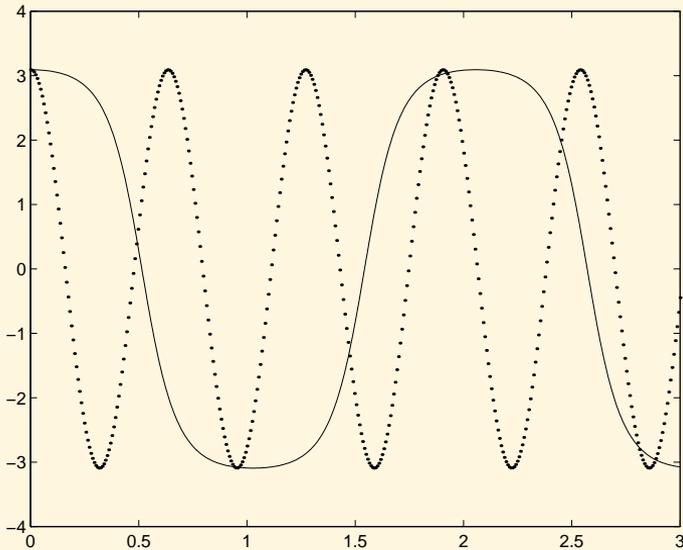


FIG. VII.1.1: Oscillation d'un pendule linéaire (en pointillés) et non-linéaire (en trait plein)

On considère un pendule initialement au repos et présentant une déviation θ_0 par rapport à

la verticale. L'équation différentielle régissant la déviation $\theta(t)$ est la suivante :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{VII.1.1})$$

Lorsque θ_0 est petit, on peut se permettre de faire une approximation de $\sin \theta(t)$ au premier ordre, ce qui conduit à poser

$$\sin \theta(t) \approx \theta(t),$$

et dans ce cas on montre aisément que l'on a

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t, \quad (\text{VII.1.2})$$

où $\omega = \sqrt{g/L}$. Par contre, si θ_0 n'est pas petit, cette approximation n'est plus valable du tout : la figure VII.1.1 montre les solutions obtenues pour $\theta_0 = \frac{63}{64}\pi$. Il est flagrant que la solution provenant du problème linéarisé (en pointillés) donne une idée bien éloignée de ce qu'il se passe en réalité (en trait plein).

Nous voyons ainsi que la linéarisation ne donne des résultats exploitables que si l'angle initial θ_0 est petit.

Or on ne sait pas obtenir de solution exacte du problème non linéaire. Il faut donc en rechercher des solutions approchées.

L'objet de ce chapitre est de présenter les principales techniques numériques permettant d'atteindre cet objectif.

D'autres possibilités d'approximation existent et étaient très développées avant l'usage intensif des ordinateurs. Par exemple, on peut chercher une solution du problème non linéaire sous forme d'un développement en série. On détermine alors les coefficients en introduisant le développement dans l'équation différentielle.

Motivations

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.2 Éléments de théorie des équations différentielles

transform

Exercices :
[Exercice VII.2](#)

Documents :
[Document VII.1](#)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable, on notera $f(t, y)$ cette fonction, $\frac{\partial f}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les applications dérivées partielles.

Définition VII.1.1. On dit que $\hat{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$, fonction continûment dérivable, est solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad (\text{VII.1.3})$$

si pour tout $t \in I$ on a

$$\hat{y}'(t) = f(t, \hat{y}(t)).$$

Une équation différentielle seule ne suffit pas à définir une solution unique. Classiquement, on lui rajoute une **condition initiale**, c'est-à-dire une condition de la forme :

$$y(t_0) = y_0, \quad \text{où } t_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{R} \text{ sont donnés.} \quad (\text{VII.1.4})$$

Dans le document référencé, nous introduisons une condition suffisante classique, pour que l'équation différentielle (VII.1.3) avec la condition initiale (VII.1.4) admette une solution et une seule dépendant continûment des données.

Nous ne nous intéresserons qu'à des problèmes de ce type. Cependant, Il faut garder à l'esprit que l'on peut être confronté à d'autres situations. Ainsi, l'équation $y' = f(t, y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$, peut admettre, éventuellement, plusieurs solutions. Par exemple l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)}, & t > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet les deux solutions

$$y_1(t) = 0 \text{ et } y_2(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Elle en admet même une infinité. En effet, quel que soit le nombre réel $a > 0$, la fonction y_a définie par

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & \text{pour } a \leq t, \end{cases}$$

est aussi solution.

Nous nous sommes limités jusqu'ici à une équation du premier ordre. Bien sûr, on rencontre des équations d'ordre supérieur. Ainsi en mécanique rencontre-t-on souvent des équations d'ordre 2 :

$$y''(t) = g(t, y(t), y'(t)), \text{ où } g : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une équation d'ordre 2 nécessite deux conditions supplémentaires pour admettre une solution unique.

Pour un **problème aux conditions initiales**, qui correspond classiquement au cas où la variable t représente le temps, ces conditions prennent la forme : $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$, soit, physiquement, la position et la vitesse à l'instant initial sont données. Nous ne nous intéressons ici qu'à ce type de problème.

Cependant, il ne faut pas oublier qu'il existe, pour la même équation différentielle, un autre type de problème que nous avons déjà rencontré : le **problème aux limites**. Les deux conditions sont alors partagées entre les deux extrémités de l'intervalle, par exemple : $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$. Ce deuxième type de problème correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numériques complètement différentes.

Pour les problèmes aux conditions initiales d'ordre 2, il existe des méthodes numériques spécifiques. Cependant il est toujours possible de les ramener à un système de deux équations

Éléments de théorie des équations dif- férentielles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

différentielles d'ordre 1, couplées et avec conditions initiales. En effet, posons :

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$U'(t) = \begin{pmatrix} U_1'(t) \\ U_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ g(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}.$$

Donc en introduisant la fonction à valeur vectorielle

$$\begin{aligned} F : I \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, U) &\longrightarrow F(t, U) = \begin{pmatrix} g_2 \\ g(t, U_1, U_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on s'est ramené au problème :

$$U'(t) = F(t, U(t)) \quad \text{avec} \quad U(0) = U_0,$$

qui a la même forme que le problème (VII.1.4-VII.1.3). On a mis l'équation différentielle d'ordre 2 sous forme *normale*.

Ce résultat se généralise aux équations différentielles d'ordre m

$$y^{(m)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$$

qui peuvent se ramener à un système de m équations différentielles d'ordre 1.

Rappel sur la différentiation : soient n, p, q trois entiers > 0 . Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^q$, dont on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles par rapport à la première et à la seconde variables. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est une matrice de taille $(q \times n)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est une matrice de taille $(q \times p)$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On suppose maintenant que x est une fonction $x : t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$. De même, $y : t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^p$. On prend $t_0 \in I$. On a $x'(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0)$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , et $y'(t_0) = \frac{dy}{dt}(t_0) \in \mathbb{R}^p$.

Soit enfin la fonction d'une variable $h : t \in I \mapsto h(t) \in \mathbb{R}^q$, définie par $h(t) = f(x(t), y(t))$. Alors sa dérivée au point $t_0 \in I$ s'écrit

$$h'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dy}{dt}(t_0).$$

Noter que les produits entre matrices et vecteurs sont compatibles : $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \in \mathcal{M}_{q,n}$ et $x'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ par exemple.

Éléments de théorie des équations dif- férentielles

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.3 Principe des méthodes numériques

Exemples :

[Exemple VII.1](#)

Soit $y(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Le principe général consiste à discrétiser l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en introduisant des points $t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + T$ qui peuvent être équidistants mais ce n'est pas obligatoire. La quantité $h_n = t_{n+1} - t_n$ s'appelle le **pas**. On veut, pour $n = 1, \dots, N$, calculer une approximation de $y(t_n)$, que l'on notera

$$z_n \approx y(t_n),$$

à l'aide d'un procédé itératif.

L'idée la plus simple consiste dans un premier temps à écrire le développement de *Taylor* de $y(t)$ en $t = t_n$: comme la solution est dérivable par rapport à t au moins une fois, on peut écrire que

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + h) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}] \\ &= y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On a supposé que h_n est constant et égal à $h = \frac{T}{N}$ où N est un entier fixé. Si l'on suppose que h est suffisamment petit, on peut alors proposer le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} z_0 &= y_0, \\ z_{n+1} &= z_n + hf(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

Ce procédé itératif s'appelle **schéma d'Euler simple**. Mais nous verrons d'autres manières de l'introduire.

Une autre solution consiste à pousser le développement de Taylor à l'ordre 2, c'est ce qui est présenté dans l'exemple référencé. On y voit qu'il est alors nécessaire de calculer $y''(t)$ soit

$$\frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)).$$

Dans ce même exemple, on présente aussi l'application de ces deux schémas à un exemple très simple.

Enfin, ayant poussé le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2, il est naturel de penser à le développer à l'ordre 3, 4, .. Cependant, il suffit de calculer $(f(t, y(t)))''$ pour voir que cette méthode devient rapidement impraticable dans le cas général.

On distingue deux grandes familles de schémas de résolution numérique des problèmes aux conditions initiales pour les équations différentielles :

- **Les schémas à un pas.** Pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point t_{n+1} , on oublie tout ce qui s'est passé avant le point t_n . Le gros avantage est de permettre de changer de pas très facilement au cours du calcul en fonction des estimations d'erreur que l'on obtient en même temps que les valeurs approchées au cours du calcul.
- **les schémas multi-pas.** Dans ces méthodes au contraire, pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point t_{n+1} , on utilise les valeurs calculées

Principe des méthodes numériques

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

en t_n, t_{n-1}, \dots . Cela permet un coût de calcul moindre, mais rend les valeurs plus interdépendantes de sorte qu'il est plus difficile de changer le pas localement au cours du calcul.

Principe des méthodes numériques

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2 Les schémas à un pas

VII.2.1 Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique	14
VII.2.2 Schémas prédicteur-correcteurs à un pas	16
VII.2.3 Première étude de la méthode d'Euler	18
VII.2.4 Ordre et consistance des schémas à un pas	20
VII.2.5 Stabilité et convergence des schémas à un pas	22
VII.2.6 Les schémas de <i>Runge-Kutta</i>	25

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.1 Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique

Exercices :
Exercice VII.4

Cours :
Principe des méthodes numériques

Pour définir certains schémas numériques de résolution d'équation différentielle, on remarque que la solution exacte $y(t)$ vérifie $y'(t) = f(t, y(t))$, ce qui donne

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

On peut alors penser approcher l'intégrale par une formule utilisant des valeurs de $f(t, y(t))$ sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ bien que $y(t)$ ne soit pas connue sur cet intervalle. Pour simplifier l'écriture, nous supposons que le pas $h_n = t_{n+1} - t_n$ est constant, $h = \frac{T}{N}$ où N est un entier, mais la généralisation à un pas non constant est évidente.

Pour commencer, utilisons la méthode des rectangles "à gauche" pour le calcul approché de l'intégrale, (ceci est équivalent à la formule de Taylor appliquée à $y(t)$ en $t = t_n$ que nous avons introduit dans le paragraphe référencé)

On peut donc proposer le schéma suivant :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (\text{VII.2.1})$$

qui n'est autre que le **schéma d'Euler simple**. On peut aussi approcher l'intégrale avec la méthode des rectangles à droite. Un calcul équivalent provient de la formule de Taylor appliquée à $y(t)$ en $t = t_{n+1}$:

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}].$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ceci conduit au schéma

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (\text{VII.2.2})$$

que l'on nomme **schéma d'Euler rétrograde**. On dit que ce schéma est **implicite** car z_{n+1} est défini implicitement comme solution de l'équation

$$x = z_n + hf(t_{n+1}, x),$$

qui en général est non-linéaire. On fait alors appel à des méthodes de type point fixe ou Newton. Cependant, comme le pas h est petit, le nombre d'itérations nécessaires en pratique est petit : parfois même une seule suffit. Il reste alors à initialiser le processus avec une première estimation de z_{n+1} , qui peut être z_n .

Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.2 Schémas prédicteur-correcteurs à un pas

Exercices :

[Exercice VII.5](#)

Reprenons le schéma implicite d'Euler rétrograde [VII.2.2](#) défini précédemment :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

On peut construire un nouveau schéma dit prédicteur-correcteur,

- on détermine une première estimation grossière de z_{n+1} , notée \tilde{z}_{n+1} , on peut avoir recours par exemple à la méthode d'Euler explicite
- on améliore cette estimation en s'inspirant du schéma d'Euler rétrograde.

On obtient le schéma :

$$\begin{cases} \hat{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, \hat{z}_{n+1}). \end{cases} \quad (\text{VII.2.3})$$

Dans le langage devenu classique pour ces méthodes, on dit que l'on fait d'abord une **prédiction** (\hat{z}_{n+1}) à l'aide du schéma explicite, puis une **correction** à l'aide du schéma implicite. En outre, on peut être conduit à itérer sur les corrections.

Voyons un autre exemple, si on utilise la méthode des trapèzes pour calculer l'intégrale de

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

cela donne l'expression

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi), \quad \xi \in [t_n, t_{n+1}].$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Le terme $y^{(3)}$ correspond à la dérivée seconde par rapport à t de $t \mapsto f(t, y(t))$. Ceci conduit au schéma suivant :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (\text{VII.2.4})$$

qui est implicite, comme le schéma d'Euler rétrograde.

On peut, comme précédemment, construire un nouveau schéma prédicteur-correcteur inspiré de ce schéma implicite, c'est le **schéma prédicteur-correcteur d'Euler-Cauchy** :

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})), \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (\text{VII.2.5})$$

**Schémas
prédicteur-
correcteurs à
un pas**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.3 Première étude de la méthode d'Euler

Exercices :

[Exercice VII.6](#)

Reprenons les schémas d'Euler explicite et implicite [VII.2.1](#), [VII.2.2](#) :

$$\begin{aligned}z_{n+1} &= z_n + hf(t_n, z_n), \quad n \geq 0, \\z_{n+1} &= z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant mettre en évidence deux types de difficulté de nature différente qui peuvent apparaître lorsque l'on emploie des méthodes de ce type. Pour cela, il va nous suffire d'appliquer ces schémas au **problème modèle** suivant :

$$\begin{cases} y' = -\lambda y(t), \text{ avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ce problème admet l'unique solution exacte : $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$.

Le schéma d'Euler explicite construit une suite de valeurs $z_n = (1 - \lambda h)^n y_0$ et le schéma d'Euler implicite $z_n = y_0 / (1 + \lambda h)^n$.

- Comportement des solutions exactes et approchées lorsque $t \rightarrow +\infty$

Nous constatons tout d'abord que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Si nous utilisons le schéma d'Euler pour des valeurs grandes de n , avec pour simplifier les écritures un pas h constant, il faut que l'on ait aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$. Or, cette condition ne sera remplie que si $|1 - \lambda h| < 1$, soit pour $\lambda > 0$, pour $h < 2/\lambda$. Cette condition peut se révéler très contraignante.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Pour le schéma d'Euler implicite, la suite z_n converge vers 0 quand n tend vers l'infini, sans aucune condition sur h . Ainsi, nous pourrions utiliser cette méthode sans avoir a priori de condition restrictive impérative sur le pas. C'est la précision désirée qui déterminera le pas : plus le pas sera petit, meilleure sera celle-ci.

- Étude de la convergence

Cette fois ci, nous nous plaçons en un point t fixé. Nous choisissons le pas h de manière qu'il existe toujours un entier n tel que $nh = t$. Alors, nous désirons que y_n soit une approximation de $y(t)$. Mieux que cela, nous voulons que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, sous la contrainte $nh = t$, alors z_n converge vers $y(t)$. Il est facile de voir que pour les méthodes d'Euler, cette propriété est satisfaite. En effet on montre dans l'exercice VII.6 que

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t} (1 - \lambda h)^n y_0 = \lim_{h \rightarrow 0, nh=t} y_0 / (1 + \lambda h)^n = y_0 e^{-\lambda(t)}.$$

Insistons bien sur le fait qu'il s'agit de deux points de vue distincts et complémentaires. Le premier n'a d'intérêt que pour t grand. En fait t grand peut être vite atteint. Ainsi, lorsque l'on fait des prévisions météorologiques, $t = 10$ jours est très grand et ce sont justement les questions de stabilité qui limitent en pratique la portée de ces prévisions.

Si par contre l'on ne s'intéresse qu'à des t 'petits', seule la question de la convergence importera.

Première étude de la méthode d'Euler

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VII.2.4 Ordre et consistance des schémas à un pas

Exercices :

[Exercice VII.7](#)

Etant donnés f, t_0, y_0, T , soit $y(t)$ la solution exacte de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (\text{VII.2.6})$$

On va supposer, pour simplifier l'exposé, que l'on discrétise avec un pas constant $h = \frac{T}{N}$, on pose $t_n = t_0 + nh$. Les schémas à un pas explicites ou prédicteur-correcteur peuvent se mettre sous la forme générique

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), 0 \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (\text{VII.2.7})$$

On peut se demander comment quantifier l'erreur commise en approchant la solution exacte $y(t)$ par la séquence discrète z_n . La définition suivante donne un début de réponse à cette question.

Définition VII.2.1. On appelle **erreur locale relative au schéma (VII.2.7)** la quantité

$$\tau_{n+1}(h) = (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - h\phi(t_n, y(t_n), h), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

où $y(t)$ est la solution exacte de l'équation différentielle (VII.2.6).

$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - z_{n+1}$ si l'on suppose que $z_n = y(t_n)$.

Définition VII.2.2. Lorsque qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| \leq Kh^p,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

le schéma est dit **d'ordre** p .

La définition suivante est propre aux schémas de résolution des équations différentielles et se déduit rapidement de l'ordre.

Définition VII.2.3. *Le schéma est dit **consistant** quand*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \left| \frac{\tau_n(h)}{h} \right| = 0.$$

Un schéma d'ordre strictement positif est donc consistant.

Pour le schéma d'Euler simple, on a

$$\tau_{n+1}(h) = (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - hf(t_n, y(t_n)) = \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Supposons que y'' est bornée sur $[t_n, t_{n+1}]$, soit $|y''(t)| \leq M \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$, alors on a

$$\tau_{n+1}(h) \leq \frac{M}{2} h^2,$$

et d'après la définition précédente, le schéma d'Euler simple est d'ordre 1. On peut vérifier que le schéma d'Euler-Cauchy est d'ordre 2 voir l'exercice [VII.7](#).

**Ordre et
consistance
des schémas à
un pas**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.5 Stabilité et convergence des schémas à un pas

Exemples :

[Exemple VII.2](#)

La consistance ou l'ordre d'un schéma n'est qu'une indication locale de l'erreur. Un moyen plus réaliste de mesurer l'erreur d'approximation de $y(t_i)$ par z_i consiste à considérer l'erreur maximum commise pour $i = 1 \dots N$, et à regarder si cette erreur tend bien vers zéro quand $h \rightarrow 0$.

Définition VII.2.4. *Le schéma*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad z_0 = y_0, \quad h = \frac{T}{N}$$

est dit **convergent** par rapport à l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |y(t_i) - z_i| = 0.$$

La consistance d'un schéma n'implique pas qu'il soit convergent, nous allons voir qu'il s'agit tout au plus d'une condition nécessaire. Une condition supplémentaire fait intervenir la notion de stabilité :

Définition VII.2.5. *Le schéma*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad z_0 = y_0,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

est dit **stable** s'il existe une constante M telle que pour tout z_0 , pour tout u_0 , pour tout $h \leq h^*$ et pour toute suite $\{\varepsilon_i\}$, les suites $\{z_i\}$ et $\{u_i\}$ définies par les relations

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h\phi(t_i, z_i, h), \\ u_{i+1} &= u_i + h\phi(t_i, u_i, h) + \varepsilon_i, \end{aligned}$$

vérifient la condition

$$\forall i = 1 \dots N, |z_i - u_i| \leq M \left(|z_0 - u_0| + \sum_{k=0}^{i-1} |\varepsilon_k| \right).$$

En gros cela signifie qu'un schéma stable n'amplifie ni les erreurs sur la condition initiale, ni les erreurs introduites dans le schéma : il s'agit d'une notion de *continuité*. On peut noter que la stabilité peut éventuellement dépendre de h . La définition ci-dessus montre qu'il peut exister un pas limite h^* au-delà duquel un schéma stable devient instable. On a aussi une condition suffisante de stabilité :

Proposition VII.2.1. *Pour qu'un schéma soit stable, il suffit qu'il existe une constante Λ telle que*

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z, u \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, h^*], |\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h)| \leq \Lambda |z - u|.$$

Cela signifie que la fonction ϕ doit vérifier la condition de Lipschitz sur son deuxième argument. En général on montre que f vérifie une condition de Lipschitz pour obtenir cette propriété pour ϕ . Dans ce cas, le schéma d'Euler simple est évidemment stable, puisque l'on a $\phi(t, z, h) = f(t, z)$.

Le théorème suivant est simple et essentiel; il est généralement connu sous le nom de **consistance plus stabilité impliquent convergence**.

Théorème VII.2.6. *Soit ϕ une fonction continue de $t \in [t_0, t_0 + T]$, $z \in \mathbb{R}$ et h , définissant le schéma à un pas*

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad z_0 = y_0, \quad h = \frac{T}{N}.$$

Stabilité et convergence des schémas à un pas

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Si ce schéma à un pas est consistant et s'il est stable, alors il est convergent par rapport à l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0, t \in [t_0, t_0 + T].$$

L'exemple référencé traite du schéma d'Euler-Cauchy.

**Stabilité et
convergence
des schémas à
un pas**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.6 Les schémas de *Runge-Kutta*

Documents :

[Document VII.2](#)

[Document VII.3](#)

Il s'agit de schémas qui permettent de retrouver les bonnes propriétés des schémas de Taylor (ordre élevé), sans en présenter les inconvénients (calcul des dérivées successives de f).

Il existe classiquement deux manières de les construire. Nous en présentons une ici. L'autre est introduite dans le document référencé.

Il s'agit de schémas à un pas, donc se mettant sous la forme

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

où ϕ prend la forme particulière suivante :

$$\phi(t, z, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i, \quad (\text{VII.2.8})$$

et les k_i sont définis récursivement de la façon suivante :

$$\begin{cases} k_1 = f(t, z), \\ k_2 = f(t + h\alpha_1, z + h\beta_{11}k_1), \\ k_3 = f(t + h\alpha_2, z + h\beta_{21}k_1 + h\beta_{22}k_2), \\ \vdots \\ k_q = f\left(t + h\alpha_{q-1}, z + h \sum_{p=1}^{q-1} \beta_{q-1,p} k_p\right). \end{cases} \quad (\text{VII.2.9})$$

L'introduction des ces q valeurs intermédiaires a pour but d'approcher un schéma de Taylor d'ordre q . Pour cela il faut déterminer les inconnues qui sont

$$[\gamma_i]_{i=1\dots q}, [\alpha_i]_{i=1\dots q-1}, [\beta_{ij}]_{i=1\dots q-1, j=1\dots i}.$$

Il est difficile d'élaborer une méthode permettant de déterminer ces inconnues pour une valeur quelconque de q , c'est pourquoi nous allons nous contenter de raisonner sur un exemple, ici pour $q = 2$, puis nous donnerons sans démonstration les valeurs obtenues pour $q = 4$, qui est la valeur la plus couramment utilisée dans la pratique.

Un schéma de Taylor d'ordre 2 s'écrit

$$z_{n+1} = z_n + h\psi(t_n, z_n, h),$$

où

$$\psi(t, z, h) = f(t, z) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right), \quad (\text{VII.2.10})$$

Pour $q = 2$ la fonction $\phi(t, z, h)$ définie par (VII.2.8)(VII.2.9) s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(t, z, h) &= \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 \\ &= \gamma_1 f(t, z) + \gamma_2 f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z)), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\beta_1 = \beta_{11}$. On va essayer d'identifier les coefficients inconnus $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \beta_1$ de façon à ce que $\phi(t, z, h)$ et $\psi(t, z, h)$ soient les plus proches possibles. Pour cela on développe

$$f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z))$$

à l'aide d'un développement de Taylor suivant les deux variables, ce qui donne à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(t + u, z + v) &= f(t, z) + u \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + v \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \\ &+ \frac{u^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \eta) + uv \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \eta) + \frac{v^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

Les schémas de Runge-Kutta

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où $(\xi, \eta) \in [t, t + u] \times [z, z + v]$. Nous obtenons ainsi

$$f(t + h\alpha_1, z + h\beta_1 f(t, z)) = f(t, z) + h\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + h\beta_1 f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) + \mathcal{O}(h^2),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\phi(t, z, h) = (\gamma_1 + \gamma_2)f(t, z) + \gamma_2 \left(h\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) + h\beta_1 f(t, z) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z) \right) + \mathcal{O}(h^2).$$

Si l'on néglige le reste on peut alors identifier cette expression avec $\psi(t, z, h)$ donné par (VII.2.10); on obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1, \\ \gamma_2 \alpha_1 &= \frac{1}{2}, \\ \gamma_2 \beta_1 &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Comme il y a trois équations pour quatre inconnues, il y a une infinité de possibilités pour le choix des coefficients; nous ne donnerons ici que les plus populaires :

– $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}$, qui donnent le schéma

$$z_{n+1} = z_n + hf \left(t_n + \frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}hf(t_n, z_n) \right), \quad (\text{VII.2.11})$$

appelé **schéma du point milieu**.

– $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \beta_1 = 1$, qui donnent le schéma bien connu

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n))),$$

puisqu'il s'agit du schéma d'Euler-Cauchy VII.2.5.

Les schémas de Runge-Kutta

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ces schémas sont bien sûr d'ordre 2 puisque l'on a

$$\phi(t_n, z_n, h) + \mathcal{O}(h^2) = \psi(t_n, z_n, h),$$

ce qui permet de conserver l'ordre de l'erreur locale du schéma de Taylor utilisé.

Le choix le plus courant est $q = 4$. Cela donne le **schéma de Runge-Kutta d'ordre 4**, ou en abrégé **RK4**, utilisé presque universellement ¹ dans les sciences de l'ingénieur :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, z_n), \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(t_{n+1}, z_n + hk_3), \end{cases}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Dans le deuxième document référencé, vous pourrez lire comment on peut adapter le pas du maillage pour augmenter l'efficacité de l'algorithme. On parle alors de maillage adaptatif.

¹parfois même à tort !

Les schémas de Runge-Kutta

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3 Les schémas multi-pas

VII.3.1	Les schémas d' <i>Adams-Bashforth</i>	30
VII.3.2	Quelques exemples de schémas d' <i>Adams-Bashforth</i>	33
VII.3.3	Les schémas implicites d' <i>Adams-Moulton</i>	34
VII.3.4	Quelques exemples de schémas d' <i>Adams-Moulton</i>	36
VII.3.5	Références bibliographiques	37

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.1 Les schémas d'Adams-Bashforth

Cours :

[Adams-Bashforth - Exemples](#)

La solution exacte $y(t)$ de l'équation différentielle, vérifie

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Certains schémas sont basés sur une approximation de

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad (\text{VII.3.1})$$

par des formules de quadrature à un et deux points. Ici on approche cette intégrale par la quantité

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt, \quad (\text{VII.3.2})$$

où $p(t)$ est l'unique polynôme de degré q vérifiant

$$p(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad i = n, n-1, \dots, n-q.$$

Si l'on écrit ce polynôme sur la base de Lagrange, on a

$$p(t) = \sum_{k=0}^q \mathcal{L}_k(t) f(t_{n-k}, y(t_{n-k})),$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

et donc

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, y(t_{n-k})),$$

avec

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{L}_k(t) dt. \quad (\text{VII.3.3})$$

Soit donc le schéma suivant, appelé **schéma d'Adams-Bashforth** à $q + 1$ pas :

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q. \quad (\text{VII.3.4})$$

Ce schéma à $q + 1$ pas fait intervenir $q + 1$ points où la fonction f est évaluée (les (t_{n-k}, z_{n-k}) , pour $k = 0, \dots, q$). On dit que c'est un schéma à $q + 1$ pas et $q + 1$ nœuds.

Ce schéma n'est valable qu'à partir de $n = q$, c'est pourquoi dans la pratique on a besoin d'approcher les q premières valeurs z_1, \dots, z_q par un schéma à un pas d'ordre suffisamment élevé (par exemple Runge-Kutta).

Remarquons que les coefficients b_k donnés par la formule (VII.3.3) sont indépendants de h . En effet on a

$$b_k = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{j=0, j \neq k}^q \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-k} - t_{n-j}} dt,$$

et si l'on pose $s = \frac{t - t_n}{h}$,

$$b_k = \int_0^1 \prod_{j=0, j \neq k}^q \frac{j + s}{j - k} ds,$$

expression qui montre bien que h n'intervient pas.

Les schémas d'Adams- Bashforth

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On peut regarder ce que donne cette approche pour $q = 1$:

$$b_0 = \int_0^1 (s+1) ds = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad b_1 = - \int_0^1 s ds = -\frac{1}{2},$$

et donc le schéma d'Adams-Bashforth à deux pas prend la forme suivante :

$$z_{n+1} = z_n + h \left[\frac{3}{2} f(t_n, z_n) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, z_{n-1}) \right], \quad n \geq 1.$$

De façon générale, les schémas d'Adams-Bashforth

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q.$$

avec les b_k donnés par (VII.3.3) sont d'ordre q . Les notions d'ordre, de consistance et de stabilité des schémas multipas sont légèrement différentes de celles concernant les schémas à un pas. Nous n'en parlerons pas dans le cadre de ce cours, elles sont très bien traitées dans l'ouvrage ² p. 257-268.

Vous trouverez dans le paragraphe de cours référencé ces schémas pour quelques valeurs de q .

Les schémas d'Adams- Bashforth

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

²BURDEN, R.L. ET FAIRES, J.D. : *Numerical Analysis* - Pws-Kent, Boston

VII.3.2 Quelques exemples de schémas d'*Adams-Bashforth*

Voici quelques schémas d'Adams-Bashforth correspondant à quelques valeurs de q .

– **Adams-Bashforth à deux pas** (et deux nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + h \left[\frac{3}{2}f(t_n, z_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, z_{n-1}) \right], \quad n \geq 1,$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = \frac{5}{12}y^{(3)}(\eta)h^3$, $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$.

– **Adams-Bashforth à trois pas** (et trois nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} [23f(t_n, z_n) - 16f(t_{n-1}, z_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, z_{n-2})], \quad n \geq 2,$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = \frac{3}{8}y^{(4)}(\eta)h^4$, $\eta \in [t_{n-2}, t_{n+1}]$.

– **Adams-Bashforth à quatre pas** (et quatre nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24} [55f(t_n, z_n) - 59f(t_{n-1}, z_{n-1}) + 37f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, z_{n-3})], \quad n \geq 3,$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = \frac{251}{720}y^{(5)}(\eta)h^5$, $\eta \in [t_{n-3}, t_{n+1}]$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.3 Les schémas implicites d'Adams-Moulton

Cours :

[Adams-Moulton - Exemples](#)

Nous allons procéder de la même manière que pour les schémas d'Adams-Bashforth. Cette fois-ci cependant, nous allons approcher l'intégrale (VII.3.1) par la quantité

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt,$$

où $p(t)$ est l'unique polynôme de degré $q + 1$ vérifiant

$$p(t_i) = f(t_i, y(t_i)), \quad i = n + 1, n, n - 1, \dots, n - q,$$

c'est-à-dire que l'on inclut $y(t_{n+1})$ dans les valeurs "connues", c'est pourquoi nous obtenons ainsi une famille de schémas multi-pas implicites appelés schémas d'**Adams-Moulton** à $q + 1$ pas :

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{k=-1}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), \quad n \geq q. \quad (\text{VII.3.5})$$

Ce schéma est un schéma à $q + 1$ pas et $q + 2$ nœuds (les (t_{n-k}, z_{n-k}) , pour $k = -1, \dots, q$).

Les coefficients b_k , qui se calculent comme pour les schémas d'Adams-Bashforth, sont obtenus par la formule

$$b_k = \int_0^1 \prod_{j=-1, j \neq k}^q \frac{j+s}{j-k} ds, \quad k = -1, 0, \dots, q.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Pour $q = 1$, on retrouve le schéma d'Euler-Centré (VII.2.4) :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} [f(t_{n+1}, z_{n+1}) + f(t_n, z_n)], \quad n \geq 0,$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{12}y^{(3)}(\eta)h^3$, $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$.

Vous trouverez dans le paragraphe référencé ces schémas pour d'autres valeurs de q .

En pratique les schémas d'Adams-Moulton ne sont pas utilisés comme tels, car ils sont implicites, et donc chercher à obtenir z_{n+1} à l'aide d'une méthode de point fixe ou de Newton ferait perdre l'avantage obtenu en réutilisant les valeurs précédentes de f . On utilise plutôt conjointement un schéma d'Adams-Bashforth et un schéma d'Adams-Moulton de même ordre pour construire un schéma prédicteur-correcteur, en utilisant comme valeur de z_{n+1} dans le schéma d'Adams-Moulton la valeur prédite par le schéma Adams-Bashforth. Le prédicteur-correcteur le plus utilisé utilise ces deux schémas à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \text{Prédicteur : } \tilde{z}_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24} [55f(t_n, z_n) - 59f(t_{n-1}, z_{n-1}) \\ &\quad + 37f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, z_{n-3})], \\ \text{Correcteur : } z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24} [9f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}) + 19f(t_n, z_n) \\ &\quad - 5f(t_{n-1}, z_{n-1}) + f(t_{n-2}, z_{n-2})]. \end{aligned}$$

On peut montrer que l'ordre de l'erreur locale de chacun des deux schémas (ici 4) est conservé.

Les schémas implicites d'Adams- Moulton

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.4 Quelques exemples de schémas d'Adams-Moulton

Voici quelques schémas d'Adams-Moulton correspondant à quelques valeurs de q .

– **Adams-Moulton à deux pas** (et trois nœuds)

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} [5f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 8f(t_n, z_n) - f(t_{n-1}, z_{n-1})], \quad n \geq 1,$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = -\frac{1}{24}y^{(4)}(\eta)h^4$, $\eta \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$.

– **Adams-Moulton à trois pas** (et quatre nœuds)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24} [9f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 19f(t_n, z_n) \\ &\quad - 5f(t_{n-1}, z_{n-1}) + f(t_{n-2}, z_{n-2})], \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = -\frac{19}{720}y^{(5)}(\eta)h^5$, $\eta \in [t_{n-2}, t_{n+1}]$.

– **Adams-Moulton à quatre pas** (et cinq nœuds)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{720} [251f(t_{n+1}, z_{n+1}) + 646f(t_n, z_n) - 264f(t_{n-1}, z_{n-1}) \\ &\quad + 106f(t_{n-2}, z_{n-2}) - 19f(t_{n-3}, z_{n-3})], \quad n \geq 3, \end{aligned}$$

Erreur locale $\tau_{n+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\eta)h^6$, $\eta \in [t_{n-3}, t_{n+1}]$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.5 Références bibliographiques

– Références pédagogiques en français

- CROUZEIX, M. ; MIGNOT, A. L. : *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris 1984.
- DEMAILLY, J. P. : *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, Grenoble, 1991.
- SCHATZMANN, M. : *Analyse numérique, cours et exercices pour la licence*, InterEditions, Paris, 1991.

– Une référence classique historique

- HENRICI, P. : *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley and sons, New York, 1962.

– Références avec A -stabilité

- GEAR, C. W. : *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- HALL, G. ; WATT, J. M. (editors) : *Modern numerical methods for ordinary differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
- LAMBERT, J. D. : *Computational methods in ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973.

– Références historiques

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Références bibliogra- phiques

- BASHFORTH, F. and ADAMS, J. C. , *Theory of Capillary Action*, Cambridge U. P. , New-York, 1883.
- DAHLQUIST, G. , ‘A special stability problem for linear multistep methods’, *BIT*, **3**, 27-43 (1963).
- HEUN, K. ‘Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen’, *Z. Math. Physik*, **45**, 23-38 (1900).
- MOULTON, F. R., *New Methods in Exterior Ballistics*, U. of Chicago, Chicago, 1926.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre VII

VII.1	Applications du développement de Taylor	40
VII.2	Applications du développement de Taylor	44

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exemple VII.1 Applications du développement de Taylor

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ici on a $f(t, y) = -y$, et donc le schéma d'Euler simple donne les itérations suivantes sur z_n :

$$\begin{cases} z_0 = 1, \\ z_{n+1} = (1 - h)z_n, & 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

La figure VII.3.2 permet de comparer la solution exacte $y(t) = \exp(-t)$ avec l'approximation obtenue avec le schéma aux points t_n , avec ici $h = 0.2$.

Il est clair que l'approximation donnée par le schéma d'Euler simple n'est pas très bonne et que l'on pourrait certainement l'améliorer en prenant un h plus petit ou en considérant le schéma correspondant à un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y''' \xi.$$

Puisque l'on a

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)),$$

on peut donc écrire

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + f(t_n, y(t_n))\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

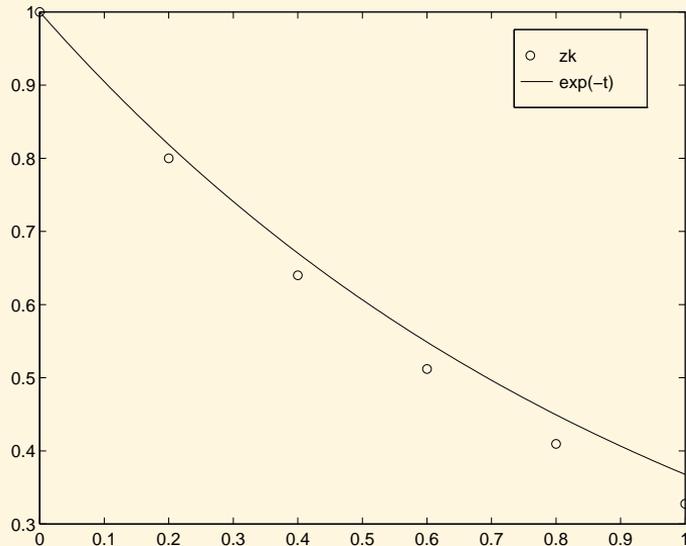
Exemple VII.1
Applications du
développement
de Taylor

FIG. VII.3.2: Approximations obtenues avec le schéma d'Euler Simple ($h = 0.2$)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

et proposer le schéma suivant :

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z_n) + f(t_n, z_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t, z_n) \right), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

Sur l'exemple, ce schéma donne les itérations suivantes :

$$\begin{cases} z_0 = 1, \\ z_{n+1} = (1 - h + \frac{h^2}{2})z_n, \quad 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

et les approximations z_k représentées sur la figure VII.3.3. Il est clair que ce schéma est meilleur, à pas égal, que le schéma d'Euler simple, mais ceci au prix du calcul de deux dérivées partielles de f , ce qui n'est pas toujours possible, par exemple quand f est le résultat d'un code de calcul trop complexe. C'est pourquoi les méthodes basées sur le développement de Taylor sont très peu utilisées dans la pratique.

[retour au cours](#)

Exemple VII.1

Applications du développement de Taylor

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

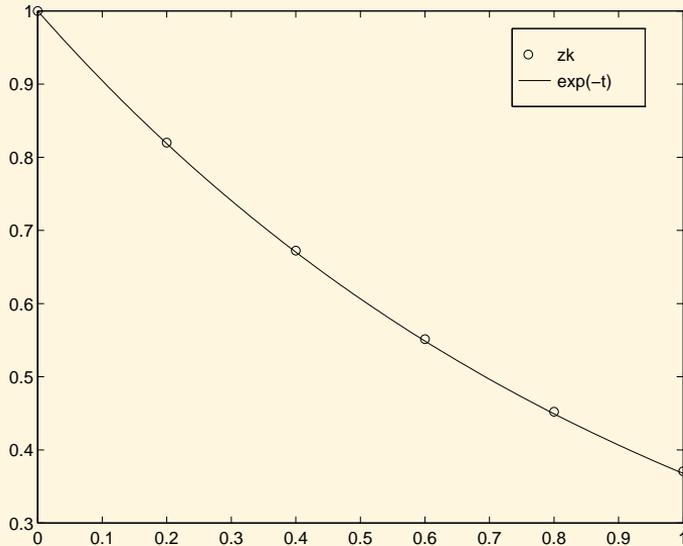
Exemple VII.1
Applications du
développement
de Taylor

FIG. VII.3.3: Approximations obtenues avec le schéma de Taylor d'ordre 2 ($h = 0.2$)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple VII.2 Applications du développement de Taylor

Considérons le schéma d'Euler-Cauchy :

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{n+1} &= z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})), \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

Pour ce schéma on a

$$\phi(t, z, h) = \frac{1}{2}f(t, z) + \frac{1}{2}f(t+h, z+hf(t, z)),$$

et pour $u \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h) &= \frac{1}{2}(f(t, z) - f(t, u)) \\ &+ \frac{1}{2}(f(t+h, z+hf(t, z)) \\ &- f(t+h, u+hf(t, u))).\end{aligned}$$

Si f vérifie une condition de Lipschitz, on a

$$\begin{aligned}|\phi(t, z, h) - \phi(t, u, h)| &\leq \frac{L}{2}|z-u| + \frac{L}{2}|z+hf(t, z) - u - hf(t, u)|, \\ &\leq L|z-u| + \frac{L}{2}|hf(t, z) - hf(t, u)|, \\ &\leq L|z-u| + \frac{hL^2}{2}|z-u|, \\ &\leq \left(L + \frac{hL^2}{2}\right)|z-u|.\end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

La fonction ϕ vérifie donc la condition de Lipschitz avec

$$\Lambda = L + \frac{hL^2}{2}.$$

Le schéma d'Euler-Cauchy est donc stable. On a démontré qu'il est consistant, il est donc convergent.

[retour au cours](#)

Exemple VII.2
Applications du
développement
de Taylor

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Documents du chapitre VII

VII.1	Condition de Lipschitz	47
VII.2	Définition des méthodes de Runge-Kutta	48
VII.3	Adaptation automatique du pas	51

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Document VII.1 Condition de Lipschitz

Définition VII.3.1. Soit g une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , on dit que g vérifie une condition de **Lipschitz** (ou qu'elle est **lipschitzienne**) s'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall x, y \in D, \quad \|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Théorème VII.3.2 (Cauchy-Lipschitz). On suppose que la fonction f est lipschitzienne en y , c'est-à-dire qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

alors le problème

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), t \in I, \\ y(t_0) &= y_0, t_0 \in I, \end{cases}$$

admet une solution unique.

Soit le problème

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dont la solution n'est pas unique. Alors on voit que f ne satisfait pas la condition de Lipschitz. En effet, il vient

$$f(t, y) - f(t, z) = \sqrt{y} - \sqrt{z} = \frac{y - z}{\sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

et le dénominateur est nul en l'origine.

[retour au cours](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Document VII.2 Définition des méthodes de Runge-Kutta

Une méthode à un pas n'utilise que le point (t_n, y_n) pour calculer (t_{n+1}, y_{n+1}) . Il va donc falloir pour obtenir des méthodes d'ordre suffisamment élevé, introduire des points intermédiaires. Soit donc le problème de Cauchy ci-dessous

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{VII.3.6})$$

On cherche à le discrétiser par rapport à une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$. L'idée est donc de calculer le point (t_{n+1}, y_{n+1}) à partir du point (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, y_{n,i})$. A chacun de ces points, on associe la 'pente'

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}).$$

qui est en fait une approximation de la pente $y'(t_{n,i})$ de la tangente à la courbe représentative de la fonction y au point $t_{n,i}$.

Ces points intermédiaires vont être les nœuds d'une formule d'intégration numérique (Q) (Q , comme quadrature) :

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \simeq \sum_{i=1}^q b_i g(c_i) \quad (Q)$$

qui servira à approcher l'expression exacte

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt,$$

soit, après passage de l'intervalle de référence $[0, 1]$ à l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} t_{n,i} &= t_n + c_i h_n, & c_i &\in [0, 1], \\ y_{n+1} &= y_n + h_n \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, y_{n,i}), \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Pour obtenir, un schéma numérique, il reste à construire les approximations $y_{n,i}$. Pour ce faire, on a à nouveau recours à l'intégration numérique, mais pour éviter d'introduire indéfiniment de nouveaux points intermédiaires, ces nouvelles formules de quadrature n'utiliseront que les nœuds c_i précédents.

On se donne alors pour chaque point $(t_{n,i}, y_{n,i})$, un méthode d'intégration numérique, que l'on définit sur chaque intervalle de référence, ici $[0, c_i]$:

$$\int_0^{c_i} g(\tau) d\tau \simeq \sum_{j=1}^q a_{ij} g(c_j), \quad (Q_i)$$

Soit alors $y(t)$ une solution exacte de (VII.3.6). On a

$$\begin{aligned} y(t_{n,i}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt \\ &= y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement de variable $t = t_n + u h_n$. De même,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du.$$

Lorsque l'on applique ces méthodes à $g(u) = f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n))$, il vient

$$\begin{cases} y(t_{n,i}) & \simeq y(t_n) + h_n \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j})), & i = 1, \dots, q \\ y(t_{n+1}) & \simeq y(t_n) + h_n \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, y(t_{n,i})), \end{cases}$$

Document VII.2

Définition des méthodes de Runge-Kutta

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

D'où la méthode de Runge-Kutta correspondante :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + \tau_i h_n, \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{j=1}^q a_{ij} p_{n,j}, \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^q b_i p_{n,i}, \end{array} \right.$$

On voit qu'il s'agit bien de méthodes à un pas avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(t, y, h) = \sum_{i=1}^q b_i f(t + c_i h, y_i), \text{ avec} \\ y_i = y + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t + c_j h, y_j), \quad 1 \leq i \leq q. \end{array} \right.$$

les méthodes de Runge-Kutta correspondantes sont *explicites* : le calcul de y_{n+1} se fait à partir de la valeur de y_n sans avoir besoin de résoudre d'équation. Si la sommation sur j se fait de 1 à i , la méthode est dite *semi-implicite*. Si elle va au delà (jusqu'à q , au maximum), elle est dite *implicite*. Alors, il faut résoudre, à chaque pas, une équation, en général non linéaire, pour calculer y_{n+1} à partir de y_n .

[retour au cours](#)

Document VII.2

Définition des
méthodes de
Runge-Kutta

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Document VII.3 Adaptation automatique du pas

La convergence d'un schéma traduit le fait que l'erreur globale $|y(t_n) - w_n|$ tend vers zéro en tous les points de la subdivision, lorsque le nombre de ces points tend vers l'infini. Comme le montre le théorème suivant, elle est directement reliée à l'erreur locale, et c'est cette relation qui justifie la suite de ce paragraphe :

Théorème VII.3.3. *Soit le schéma à un pas*

$$\begin{cases} z_0 &= y_0, \\ z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (\text{VII.3.7})$$

approchant la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad y(t_0) = y_0.$$

Si le schéma est convergent pour $h < h^$, et si l'erreur locale $\tau_{n+1}(h)$ vérifie*

$$\left| \frac{\tau_{n+1}(h)}{h} \right| \leq \epsilon(h), \quad \forall n, \quad \forall h < h^*$$

alors on a la majoration

$$|y(t_n) - z_n| \leq \frac{\epsilon(h)}{L} e^{L(t_n - t_0)}, \quad \forall n,$$

où L est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ relative au schéma (VII.3.7).

On peut donc contrôler l'erreur globale, pour peu que l'on puisse imposer à l'erreur locale de ne pas dépasser un certain seuil de tolérance. Cela permettrait par exemple d'utiliser un minimum de pas de temps, tout en respectant cette tolérance. Malheureusement, et ce n'est pas une surprise, avoir le minimum de pas de temps tout en contrôlant l'erreur globale est un objectif impossible à réaliser si le pas h reste constant.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On peut estimer l'erreur locale en procédant de la façon suivante : supposons que nous disposons d'un schéma à un pas d'ordre p

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (\text{VII.3.8})$$

L'erreur locale associée à ce schéma est donnée par la quantité

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, y(t_n), h) = \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

où y désigne la solution de l'équation différentielle originale. On se donne un deuxième schéma

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 = y_0, \\ \tilde{z}_{n+1} = \tilde{z}_n + h\tilde{\phi}(t_n, z_n, h), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (\text{VII.3.9})$$

d'ordre $p + 1$, dont l'erreur locale $\tilde{\tau}_{n+1}(h)$ vérifie donc

$$\tilde{\tau}_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Supposons que l'on dispose de z_n pour un $n \geq 0$ donné, et appliquons les deux schémas pour obtenir une approximation de $y(t_{n+1})$: on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \\ \tilde{z}_{n+1} &= z_n + h\tilde{\phi}(t_n, z_n, h). \end{aligned}$$

Si l'on fait l'hypothèse que $z_n = y(t_n)$ (vraie pour $n = 0$!), on peut écrire que

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - z_n - h\phi(t_n, z_n, h), \\ &= y(t_{n+1}) - z_n - (z_{n+1} - z_n) = y(t_{n+1}) - z_{n+1}. \end{aligned}$$

**Document
VII.3**
Adaptation
automatique
du pas

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Si on ajoute et retranche \tilde{z}_{n+1} à cette dernière quantité, on obtient

$$\begin{aligned}\tau_{n+1}(h) &= y(t_{n+1}) - \tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}, \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \tilde{\phi}(t_n, y(t_n), h) + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}, \\ &= \tilde{\tau}_{n+1}(h) + \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}.\end{aligned}$$

Puisque $\tilde{\tau}_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+2})$ et $\tau_{n+1}(h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$ on peut donc négliger $\tilde{\tau}_{n+1}(h)$ devant $\tau_{n+1}(h)$, et estimer $\tau_{n+1}(h)$ par :

$$\hat{\tau}_{n+1}(h) = \tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}.$$

On utilise cet estimateur de la façon suivante : on part d'un pas initial, typiquement $h = (T - t_0)/100$, et à chaque itération n , on calcule $\tilde{z}_{n+1} - z_{n+1}$ et donc $\hat{\tau}_{n+1}(h)$. On a ensuite les cas suivants à envisager :

- Si $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} \in [\varepsilon/10, \varepsilon]$, alors on accepte z_{n+1} , on conserve le même pas pour l'itération suivante.
- Si $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} \in [0, \varepsilon/10[$ on accepte z_{n+1} et on augmente le pas pour l'itération suivante (par exemple $h \leftarrow 2h$).
- Si $\frac{|\hat{\tau}_{n+1}(h)|}{h} > \varepsilon$, on refuse z_{n+1} , on diminue le pas (par exemple $h \leftarrow h/2$) et on recalcule z_{n+1} , \tilde{z}_{n+1} puis $\hat{\tau}_{n+1}(h)$.

En général, on impose une valeur maximale au pas (souvent il s'agit de sa valeur initiale), ainsi qu'une valeur minimale. Lorsque le pas minimum est atteint, cela signifie que soit la valeur minimum est trop grande par rapport à la tolérance ε exigée, soit la solution de l'équation différentielle présente une singularité à l'instant t_n considéré.

La méthode la plus utilisée est basée sur deux schémas de Runge-Kutta, respectivement d'ordre 4 et 5 (c'est la méthode utilisée dans la fonction `ode45` de Matlab).

[retour au cours](#)

**Document
VII.3**
Adaptation
automatique
du pas

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercices du chapitre VII

VII.1	55
VII.2	56
VII.3	57
VII.4	58
VII.5	59
VII.6	60
VII.7	61

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice VII.1

Résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.2

Montrer que pour tout réel $a \geq 0$,

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & \text{pour } a \leq t, \end{cases}$$

est solution de

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Bien vérifier que c'est une fonction dérivable en tout point $t \geq 0$. (On s'en assurera en étudiant soigneusement le point de raccord $t = a$.)

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.3

Montrer que la résolution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0 , g et L sont des réels donnés, se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.4

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler implicite pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0 , g et L sont des réels donnés

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.5

Expliquer comment on obtiendrait le premier itéré de la méthode d'Euler-Cauchy pour résoudre

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases}$$

où θ_0 , g et L sont des réels donnés.

[retour au cours](#)

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.6

Montrer que les schémas explicite et implicite d'Euler appliqués à

$$\begin{cases} y' = -\lambda y(t), \text{ avec } \lambda > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

avec $nh = t$ (pas constant) conduisent chacun à une suite (z_n) telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0, nh=t} z_n = y_0 e^{-\lambda(t)}.$$

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice VII.7

Calculer l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy.

[retour au cours](#)

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Annexe A

Exercices

A.1	Exercices de TD du chapitre 7	63
-----	---	----

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.1 Exercices de TD du chapitre 7

A.1.1	64
A.1.2	65
A.1.3	67

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.1

On veut résoudre numériquement

$$y''(t) + \alpha y(t) + \beta t y^2(t) + \gamma y'(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad y(0) = \lambda, \quad y'(0) = \mu.$$

1. Donner les schémas d'Euler, du point milieu puis de Runge Kutta d'ordre 4 pour résoudre ce problème.
2. Ecrire un algorithme permettant de résoudre cette équation par le schéma du point milieu.
3. On choisit $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$.
 - (a) Quelle est la solution exacte ?
 - (b) Déterminer une approximation de $y(h)$ à l'aide de chacun des trois schémas précédents, comparer avec la solution exacte.

Question 1 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

Question 2 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 3a [Aide 1](#) [Aide 2](#)

Question 3b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.2

Etant donné la fonction f , les valeurs initiales t_0 et y_0 , la valeur maximale T , on se propose de résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

On choisit un pas $h = \frac{T}{n}$, on note $t_{i+1} = t_i + h$, on définit le schéma numérique destiné à résoudre (A.1.1) :

$$\begin{cases} y_{i+1} &= y_i + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \\ k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ k_2 &= hf(t_i + \lambda h, y_i + \lambda k_1) \end{cases}, \text{ où } \alpha_1, \alpha_2, \lambda \text{ sont des coefficients réels}$$

1. (a) Etant donné $t_i, \lambda, y(t)$ solution de l'équation différentielle (A.1.1), on note $g(h) = f(t_i + \lambda h, y(t_i) + \lambda h y'(t_i))$. Montrer que

$$g(0) = y'(t_i), \quad g'(0) = \lambda y''(t_i), \quad g''(0) = \lambda^2 y'''(t_i) - \lambda^2 y''(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i)).$$

- (b) Déterminer les coefficients α_1 et α_2 pour que l'ordre du schéma numérique soit le plus élevé possible. Réponse : $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_2 \lambda = \frac{1}{2}$.
- (c) Expliciter le schéma numérique dans le cas $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = 1$. Quelles méthodes classiques obtient-on ? Donner une interprétation graphique : dans le plan, à partir du point de coordonnées (t_i, y_i) , tracer les différentes droites qui permettent d'obtenir le point de coordonnées (t_{i+1}, y_{i+1}) , on suppose bien sûr que l'on sait calculer $f(t, y)$ pour tout couple (t, y) .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2. On suppose que la fonction f vérifie une condition de Lipschitz en y :

$$\exists C, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z, y \in \mathbb{R} |f(t, y) - f(t, z)| \leq C|y - z|.$$

Montrer qu'alors le schéma numérique est stable.

3. En déduire que le schéma numérique est convergent.

Question 1a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#) [Aide 6](#)

Question 1b [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Question 1c [Aide 1](#)

Exercice A.1.2

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.3

Etant donné t_0, T, N , on note $h = \frac{T}{N}$, $t_i = t_0 + ih$.

1. Etant donné les valeurs f_i et f_{i-1} , on note p_i le polynôme d'interpolation vérifiant

$p_i(t_i) = f_i$, $p_i(t_{i-1}) = f_{i-1}$, donner l'expression de $\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p_i(t) dt$ en fonction de h, f_i, f_{i-1} .

2. On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

à l'aide d'un schéma multi-pas, on utilise la relation $y(t_{i+1}) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$, pour cela si on suppose connues des approximations y_{i-1} et y_i de $y(t_{i-1})$ et $y(t_i)$, on calcule $f_i = f(t_i, y_i)$, $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1})$ et on approche $y(t_{i+1})$ par y_{i+1} défini par :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p_i(t) dt$$

où p_i est le polynôme défini à la question précédente.

Donner l'expression de y_{i+1} à l'aide de h, y_{i-1} et y_i .

3. Quel est l'ordre du schéma numérique ?

4. La mise en oeuvre de ce schéma multi-pas suppose que l'on connaisse les valeurs y_0 et y_1 , comment proposez-vous de déterminer ces valeurs ?

5. On note maintenant p_i le polynôme d'interpolation vérifiant

$$p_i(t_i) = f_i, p_i(t_{i-1}) = f_{i-1}, p_i(t_{i-2}) = f_{i-2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3

(a) Donner l'expression de $\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p_i(t) dt$ en fonction de h, f_i, f_{i-1}, f_{i-2} .

(b) On approche $y(t_{i+1})$ par y_{i+1} défini par :

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p_i(t) dt$$

où p_i est le polynôme défini à la question précédente.

Donner l'expression de y_{i+1} à l'aide de h, y_{i-2}, y_{i-1} et y_i .

Réponse : $y_{i+1} = y_{i-1} + h \left(\frac{7}{3} f(t_i, y_i) - \frac{2}{3} f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{3} f(t_{i-2}, y_{i-2}) \right)$.

(c) Quel est l'ordre de ce schéma numérique ?

Question 1 [Aide 1](#)

Question 2 [Aide 1](#)

Question 3 [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

Question 4 [Aide 1](#)

Question 5c [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#) [Aide 4](#) [Aide 5](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

A

Adams-Bashforth	30
Adams-Bashforth - Exemples	30, 33
Adams-Moulton	34
Adams-Moulton - Exemples	34, 36

E

Equation différentielle	
Exemple	4
Introduction	6
Références	37
Euler-exemples	14
Euler-étude de la méthode	18

O

Ordre des schémas à un pas	20, 22
----------------------------------	---------------

P

Principe des méthodes numériques	10, 14
--	---------------

R

Runge-Kutta	25
-------------------	-----------

S

Schémas prédicteur-correcteurs	16
--------------------------------------	-----------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Solution de l'exercice VII.1

Revoyez la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, par exemple dans le polycopié de MT21 chapitre9.

les constantes g et L sont positives, la solution de

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

est donc

$$\begin{cases} \theta(t) = a \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t + b \sin \sqrt{\frac{g}{L}}t \\ a = \theta_0, b = 0. \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.2

Pour $t \in]0, a[$, y_a est dérivable et sa dérivée est nulle.

Pour $t \in]a, +\infty[$, y_a est dérivable et $y'_a(t) = \frac{t-a}{2}$.

Donc en $t = a$ y_a admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ces deux dérivées sont égales donc y_a est dérivable en a et $y'_a(a) = 0$.

On vérifie que

pour $t \in]0, a[$, $\sqrt{y_a(t)} = 0 = y'_a(t)$,

pour $t \in]a, +\infty[$, $\sqrt{y_a(t)} = \frac{|t-a|}{2} = \frac{t-a}{2} = y'_a(t)$.

On a de plus $y_a(0) = 0$, y_a est donc solution du problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy admet donc une infinité de solutions

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.3

On pose

$$Y_1(t) = \theta(t), Y_2(t) = \dot{\theta}(t), Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ -\frac{g}{L} \sin Y_1(t) \end{pmatrix} = F(Y(t)), \\ Y(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.4

Revoir l'exercice [VII.3](#) qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas h , on a $t_1 = h$, le vecteur $Y^{(1)}$ qui est une approximation de $\begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$ est obtenu en résolvant $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(Y^{(1)})$, si l'on note u et v les deux composantes du vecteur $Y^{(1)}$, on doit donc résoudre le système de deux équations :

$$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + hF(Y^{(1)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{L} \sin u \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u - hv - \theta_0 = 0 \\ v + h\frac{g}{L} \sin u = 0 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations non linéaires que l'on peut résoudre par exemple par la méthode de Newton vue dans le chapitre 4. Cette méthode nécessite une valeur initiale pour le vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on peut choisir par exemple $Y^{(0)}$.

Pour calculer $Y^{(2)}$ (puis pour les autres itérés), on devra résoudre à nouveau un système de 2 équations

$$Y^{(2)} = Y^{(1)} + hF(Y^{(2)}).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.5

Revoir l'exercice [VII.3](#) qui permet d'obtenir un système d'équations différentielles du premier ordre équivalent.

On choisit un pas h , on a $t_1 = h$, on pose $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y(0)$. Le vecteur $Y^{(1)}$ qui est une approximation de $Y(t_1) = \begin{pmatrix} \theta(t_1) \\ \dot{\theta}(t_1) \end{pmatrix}$ est obtenu explicitement en écrivant

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + \frac{h}{2} \left(F(Y^{(0)}) + F(Y^{(0)} + hF(Y^{(0)})) \right)$$

On calcule

$$Y^{(0)} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, F(Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix}, Y^{(0)} + hF(Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ -h\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix},$$

$$F(Y^{(0)} + hF(Y^{(0)})) = \begin{pmatrix} -h\frac{g}{L} \sin \theta_0 \\ -\frac{g}{L} \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir $Y^{(1)}$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.6

Pour le schéma d'Euler simple on a

$$z_0 = y_0, z_i = z_{i-1} - \lambda h z_{i-1} = (1 - \lambda h) z_{i-1} = \dots = (1 - \lambda h)^i z_0$$

On a $ih = t$, donc $i = \frac{t}{h}$, quand h tend vers 0 $(1 - \lambda h)^i$ est indéterminée de la forme 1^∞ , levons l'indétermination.

$$(1 - \lambda h)^i = (1 - \lambda h)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h} \ln(1 - \lambda h)\right) = \exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - \lambda h)^i = \lim_{h \rightarrow 0} \exp\left(\frac{t}{h}(-\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t).$$

Et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_i = y_0 \exp(-\lambda t).$$

Pour le schéma d'Euler implicite on a

$$z_0 = y_0, z_i = z_{i-1} - \lambda h z_i \Leftrightarrow z_i = \frac{1}{1 + \lambda h} z_{i-1} = \dots = \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^i z_0$$

Là encore, quand h tend vers 0 $\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^i$ est indéterminée de la forme 1^∞ , levons l'indétermination.

$$\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^i = \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^{\frac{t}{h}} = \exp\left(\frac{t}{h} \ln\left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h} \ln(1 + \lambda h)\right) = \exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right).$$

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \lambda h}\right)^i = \lim_{h \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t}{h}(\lambda h + h\epsilon(h))\right) = \exp(-\lambda t).$$

Et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_i = y_0 \exp(-\lambda t).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice VII.7

Pour obtenir l'ordre du schéma d'Euler-Cauchy, il faut calculer le développement limité de

$$\tau_{n+1}(h) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))) ,$$

où y est solution de

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

On va supposer que les fonctions f, y sont suffisamment dérivables. En utilisant les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on obtient

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

On peut écrire $\tau_{n+1}(h)$ comme la somme de trois termes :

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n), \quad B = -\frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)), \quad C = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))).$$

$$A = y(t_{n+1}) - y(t_n) = hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3} y'''(c), \quad c \in]t_n, t_{n+1}[.$$

$$B = -\frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) = -\frac{h}{2} y'(t_n).$$

$$C = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) = -\frac{h}{2} f(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n)) = -\frac{h}{2} g(h),$$

où l'on a noté

$$g(h) = f(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

en utilisant les dérivées des fonctions composées, on obtient :

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n)) + y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n + h, y(t_n) + hy'(t_n))$$

on a donc

$$g(0) = f(t_n, y(t_n)) = y'(t_n), \quad g'(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + y'(t_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) = y''(t_n)$$

En utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2}g''(d) = y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}g''(d), \quad d \in]0, h[$$

d'où

$$C = -\frac{h}{2}y'(t_n) - \frac{h^2}{2}y''(t_n) - \frac{h^3}{4}g''(d).$$

En regroupant

$$\tau_{n+1}(h) = A + B + C = h^3 \left(\frac{y'''(c)}{3} - \frac{g''(d)}{4} \right),$$

si l'on suppose que les fonctions y''' et g'' sont majorées respectivement par M_1 et M_2 , on obtient

$$|\tau_{n+1}(h)| \leq h^3 \left(\frac{M_1}{3} + \frac{M_2}{4} \right), \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\tau_{n+1}(h)}{h} \right| \leq Mh^2, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

le schéma d'Euler-Cauchy est donc d'ordre 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.1

Il faut commencer par se ramener à un système d'équation du premier ordre.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1, Exercice A.1.1

On pose

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) = y(t) \\ z_2(t) = y'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Que vaut $z(0)$?

Donner l'expression de $z'(t)$ en fonction de t , $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

En déduire une fonction $F(t, z)$ telle que

$$z'(t) = F(t, z(t)).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1, Exercice A.1.1

$$z(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) = -(\alpha y(t) + \beta t y^2(t) + \gamma y'(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ -\alpha z_1(t) - \beta t z_1^2(t) - \gamma z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Si l'on définit

$$F(t, z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\alpha z_1 - \beta t z_1^2 - \gamma z_2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$z'(t) = F(t, z(t)).$$

Il suffit alors de recopier les schémas classiques.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 1, Exercice A.1.1

– **Schéma d'Euler** : (ordre 1)

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + h F \left(t_n, z^{(n)} \right)$$

– **Schéma du Point Milieu** : (ordre 2)

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + h K_2$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_1 = F \left(t_n, z^{(n)} \right) \\ K_2 = F \left(t_n + \frac{h}{2}, z^{(n)} + \frac{h}{2} K_1 \right) \end{cases}$$

– **Schéma du Runge Kutta d'ordre 4** :

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_1 = F \left(t_n, z^{(n)} \right) \\ K_2 = F \left(t_n + \frac{h}{2}, z^{(n)} + \frac{h}{2} K_1 \right) \\ K_3 = F \left(t_n + \frac{h}{2}, z^{(n)} + \frac{h}{2} K_2 \right) \\ K_4 = F \left(t_n, z^{(n)} + h K_3 \right) \end{cases}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.1

Quelles sont les données ?

Que calcule-t-on ?

Comment range-t-on les différentes valeurs calculées ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2, Exercice A.1.1

Données : $T \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, λ , μ , et la fonction $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (t, z) \rightarrow F(t, z)$

On calcule et on range les vecteurs $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(N)}$ dans une matrice Z à 2 lignes et N colonnes.

La première ligne contient les premières composantes des $z^{(i)}$, c'est-à-dire les approximations des $y(t_i)$.

La seconde ligne contient les deuxièmes composantes des $z^{(i)}$, c'est-à-dire les approximations des $y'(t_i)$, $1 \leq i \leq N$

N est le nombre de points de discrétisation (les t_i).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 2, Exercice A.1.1

$$h = T/N$$

initialiser la matrice Z à 0

$$zz = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$tt = 0$$

pour $i=1$ à N

$$K1 = F(tt, zz)$$

$$K2 = F(tt + h/2, zz + h/2 * K1)$$

$$zz = zz + h * K2$$

stocker zz dans la i ème colonne de Z

$$tt = tt + h$$

fin pour

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3a, Exercice A.1.1

La solution générale est donc :

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer C_1 et C_2 .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3a, Exercice A.1.1

la solution exacte est

$$y(t) = \sin t$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

On rappelle les développements limités classiques :

$$\begin{cases} y(h) = \sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + h^5 \epsilon_1(h) \\ y'(h) = \cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + h^5 \epsilon_2(h) \end{cases}$$

On va maintenant calculer $z^{(1)}$ approximation de $\begin{pmatrix} y(h) \\ y'(h) \end{pmatrix}$ à l'aide des trois schémas décrits.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Schéma d'Euler : (ordre 1)

$$z^{(1)} = z^{(0)} + h F(t_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h F\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de $\begin{pmatrix} \sin h \\ \cos h \end{pmatrix}$ à l'ordre **1**.

Calculez maintenant $z^{(1)}$ à l'aide du schéma point milieu.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Point Milieu : (ordre 2)

$$\begin{cases} K_1 = F\left(t_0, z^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ K_2 = F\left(t_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(\frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 0 + \frac{h}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} \\ z^{(1)} = z^{(0)} + h K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de $\begin{pmatrix} \sin h \\ \cos h \end{pmatrix}$ à l'ordre **2**.

Calculez maintenant $z^{(1)}$ à l'aide du schéma RK4.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Runge Kutta à l'ordre 4

$$\begin{cases} K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} \\ K_3 = F\left(t_0 + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2}K_2\right) = F\left(\frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix} \\ K_4 = F\left(t_0, z^{(0)} + hK_3\right) = F\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{2} \\ -h + \frac{h^3}{4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= z^{(0)} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 + 2 + 2 - \frac{h^2}{2} + 1 - \frac{h^2}{2} \\ 0 - h - h - h + \frac{h^3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{h}{6}(6 - h^2) \\ 1 + \frac{h}{6}(-3h + \frac{h^3}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h - \frac{h^3}{3!} \\ 1 - \frac{h}{2!} + \frac{h^4}{4!} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ceci correspond à la partie polynomiale du DL de $\begin{pmatrix} \sin h \\ \cos h \end{pmatrix}$ à l'ordre 4

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1a, Exercice A.1.2

On obtient

$$g(0) = f(t_i, y(t_i)) = y'(t_i)$$

Si l'on note $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial y}$, les dérivées partielles de f , d'après les résultats sur les dérivées des fonctions composées on sait que si $g(h) = f(a(h), b(h))$, alors $g'(h) = a'(h) \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + b'(h) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$. Appliquez ce résultat ici.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1a, Exercice A.1.2

On a ici

$$a(h) = t_i + \lambda h, \text{ donc } a'(h) = \lambda, b(h) = y(t_i) + \lambda h y'(t_i) \text{ donc } b'(h) = \lambda y'(t_i)$$

On obtient donc

$$g'(h) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$$

on a donc

$$g'(0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(0), b(0)) + \lambda y'(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(a(0), b(0)) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y(t_i)) + \lambda y'(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i))$$

Calculez $y''(t)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1a, Exercice A.1.2

On a $y'(t) = f(t, y(t))$, on utilise à nouveau les dérivées des fonctions composées et on obtient :

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

on a donc

$$y''(t_i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, y(t_i)) + y'(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i))$$

Donc

$$g'(0) = \lambda y''(t_i)$$

De façon similaire calculez $g''(h)$ puis $g''(0)$, calculez $y'''(t_i)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 1a, Exercice A.1.2

On a

$$g'(h) = \lambda \frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$$

$$a(h) = t_i + \lambda h, \quad b(h) = y(t_i) + \lambda h y'(t_i)$$

Il suffit donc d'appliquer (encore !) la règle de dérivation des fonctions composées appliquée ici aux fonctions $\frac{\partial f}{\partial t}(a(h), b(h))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a(h), b(h))$, on obtient :

$$g''(h) = \lambda a'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a(h), b(h)) + \lambda b'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_i) a'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda y'(t_i) b'(h) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a(h), b(h))$$

Terminez le calcul de $g''(h)$ puis calculez $g''(0)$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 1a, Exercice A.1.2

$$g''(h) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a(h), b(h)) + 2\lambda^2 y'(t_i) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(a(h), b(h)) + \lambda^2 (y'(t_i))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a(h), b(h))$$

$$g''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_i, y(t_i)) + 2\lambda^2 y'(t_i) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_i, y(t_i)) + \lambda^2 (y'(t_i))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_i, y(t_i))$$

Calculez maintenant $y'''(t)$ en utilisant l'expression de $y''(t)$ déjà calculée.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 6, Question 1a, Exercice A.1.2

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

si l'on note

$$\phi(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)), \psi(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

en utilisant (encore et toujours !) la dérivée des fonctions composées, on obtient :

$$\phi'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)), \psi'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))$$

En utilisant les résultats sur les produits et les sommes on a

$$y'''(t) = \phi'(t) + y'(t)\psi'(t) + y''(t)\psi(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) + (y'(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) + y''(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))$$

En comparant avec le résultat obtenu pour $g''(0)$, à savoir :

$$g''(0) = \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_i, y(t_i)) + 2\lambda^2 y'(t_i) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_i, y(t_i)) + \lambda^2 (y'(t_i))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_i, y(t_i))$$

on obtient le résultat recherché :

$$g''(0) = \lambda^2 y'''(t_i) - \lambda^2 y''(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i)).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1b, Exercice A.1.2

On va calculer un développement de Taylor de

$$\tau_{i+1}(h) = y(t_{i+1}) - y(t_i) - \alpha_1 h y'(t_i) - \alpha_2 h g(h).$$

A quel ordre ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 1b, Exercice A.1.2

Il faudrait progressivement augmenter l'ordre jusqu'à trouver le premier terme non nul.

Cependant puisque dans la question précédente on demande de calculer $g(0), g'(0), g''(0)$, cela va nous permettre d'écrire le développement de $hg(h)$ jusqu'à l'ordre 3, faisons de même pour les autres termes.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, Question 1b, Exercice A.1.2

On a

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + h^3(\dots) = y'(t_i) + h\lambda y''(t_i) + \frac{h^2}{2}K + h^3(\dots).$$

où

$$K = \left(\lambda^2 y'''(t_i) - \lambda^2 y''(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i)) \right).$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcllclclcl} y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) & + hy'(t_i) & + \frac{1}{2}h^2 y''(t_i) & + \frac{1}{6}h^3 y'''(t_i) & + h^4(\dots) \\ -y(t_i) & = & -y(t_i) & & & & \\ -\alpha_1 h y'(t_i) & = & -\alpha_1 h y'(t_i) & & & & \\ -\alpha_2 h g(h) & = & -\alpha_2 h y'(t_i) & -\alpha_2 \lambda h^2 y''(t_i) & -\alpha_2 \frac{h^3}{2} K & & + h^4(\dots) \\ \tau_{i+1}(h) & = & h y'(t_i)(1 - \alpha_1 - \alpha_2) & + h^2 y''(t_i)(\frac{1}{2} - \alpha_2 \lambda) & + h^3 (\frac{1}{6} y'''(t_i) - \frac{\alpha_2}{2} K) & & + h^4(\dots) \end{array}$$

Il est donc possible d'annuler les termes en h et les termes en h^2 à condition que

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \frac{1}{2} - \alpha_2 \lambda = 0.$$

Le coefficient du terme en h^3 vaut

$$\frac{1}{6} y'''(t_i) - \frac{\alpha_2}{2} K = \frac{1}{6} y'''(t_i) - \frac{\alpha_2}{2} \left(\lambda^2 y'''(t_i) - \lambda^2 y''(t_i) \frac{\partial f}{\partial y}(t_i, y(t_i)) \right),$$

il n'est pas possible d'annuler ce terme.

Le schéma numérique sera d'ordre 2

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1c, Exercice A.1.2

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient la méthode du point milieu, pour $\lambda = 1$ on obtient la méthode d'Euler-Cauchy.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1, Exercice A.1.3

On trouve

$$p_i(t) = \frac{t - t_{i-1}}{h} f_i - \frac{t - t_i}{h} f_{i-1}$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} p_i(t) dt = 2h f_i.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 2, Exercice A.1.3

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(t_i, y_i).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3, Exercice A.1.3

On calcule

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) - 2hf(t_i, y(t_i)) \\ &= y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) - 2hy'(t_i).\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 3, Exercice A.1.3

On effectue un développement de Taylor de $y(t_{i+1})$, $-y(t_{i-1})$ et de $-2hy'(t_i)$ on s'arrêtera lorsque l'on trouvera un terme non nul. Commençons par l'ordre 1

$$\begin{array}{rcl} y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) + hy'(t_i) + h^2(\dots) \\ -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) & = & -y(t_i) + hy'(t_i) + h^2(\dots) \\ -2hy'(t_i) & = & -2hy'(t_i) \\ \tau_{i+1}(h) & = & +h^2(\dots) \end{array}$$

Les termes constants et les termes en h s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{array}{rcll}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) & +hy'(t_i) & +\frac{1}{2}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) & = & -y(t_i) & +hy'(t_i) & -\frac{1}{2}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) \\
 -2hy'(t_i) & = & & -2hy'(t_i) & & \\
 \tau_{i+1}(h) & = & & & & +h^3(\dots)
 \end{array}$$

Les termes en h^2 s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{aligned}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) &= -y(t_i) + hy'(t_i) - \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 -2hy'(t_i) &= -2hy'(t_i) \\
 \tau_{i+1}(h) &= +h^3(\dots) + h^4(\dots)
 \end{aligned}$$

Les termes en h^3 ne s'éliminent pas, on peut écrire le développement de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(c) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) &= -y(t_i) + hy'(t_i) - \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(d) \\
 -2hy'(t_i) &= -2hy'(t_i) \\
 \tau_{i+1}(h) &= \frac{1}{3}h^3 \frac{y'''(c) + y'''(d)}{2}
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{1}{3}h^3y'''(e)$$

où $c \in]t_i, t_{i+1}[$, $d \in]t_{i-1}, t_i[$, $e \in]t_{i-1}, t_{i+1}[$ On peut donc en déduire l'ordre du schéma.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 5, Question 3, Exercice A.1.3

Si on note M un majorant de $|y'''(t)|$ sur $[t_0, t_0 + T]$, on a donc

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{|\tau_{i+1}(h)|}{h} \leq \frac{M}{3} h^2$$

Le schéma est donc d'ordre 2.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 4, Exercice A.1.3

y_0 est connu, y_1 peut être calculé à l'aide d'un schéma à un pas.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 5c, Exercice A.1.3

On calcule

$$\begin{aligned}\tau_{i+1}(h) &= y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) - h \left(\frac{7}{3}f(t_i, y(t_i)) - \frac{2}{3}f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{1}{3}f(t_{i-2}, y(t_{i-2})) \right) \\ &= y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) - h \left(\frac{7}{3}y'(t_i) - \frac{2}{3}y'(t_{i-1}) + \frac{1}{3}y'(t_{i-2}) \right)\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 5c, Exercice A.1.3

On effectue un développement de Taylor de $y(t_{i+1})$, $-y(t_{i-1})$, $-\frac{7}{3}hy'(t_i)$, $\frac{2}{3}hy'(t_{i-1})$, $-\frac{1}{3}hy'(t_{i-2})$, on s'arrêtera lorsque l'on trouvera un terme non nul. Commençons par l'ordre 1

$$\begin{array}{rcl}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) + hy'(t_i) + h^2(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) & = & -y(t_i) + hy'(t_i) + h^2(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_i) & = & -\frac{7}{3}hy'(t_i) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{i-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_i - h) & = & +\frac{2}{3}hy'(t_i) + h^2(\dots) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{i-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_i - 2h) & = & -\frac{1}{3}hy'(t_i) + h^2(\dots) \\
 \tau_{i+1}(h) & = & +h^2(\dots)
 \end{array}$$

Les termes constants et les termes en h s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 2

$$\begin{array}{rcll}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) & +hy'(t_i) & +\frac{1}{2}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) & = & -y(t_i) & +hy'(t_i) & -\frac{1}{2}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_i) & = & & -\frac{7}{3}hy'(t_i) & & \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{i-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_i - h) & = & \frac{2}{3}hy'(t_i) & -\frac{2}{3}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) & \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{i-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_i - 2h) & = & -\frac{1}{3}hy'(t_i) & +\frac{2}{3}h^2y''(t_i) & +h^3(\dots) & \\
 \tau_{i+1}(h) & = & & & +h^3(\dots) &
 \end{array}$$

Les termes en h^2 s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 4, Question 5c, Exercice A.1.3

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{array}{rcll}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) & = & y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) & = & -y(t_i) + hy'(t_i) - \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_i) & = & -\frac{7}{3}hy'(t_i) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{i-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_i - h) & = & \frac{2}{3}hy'(t_i) - \frac{2}{3}h^2y''(t_i) + \frac{1}{3}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{i-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_i - 2h) & = & -\frac{1}{3}hy'(t_i) + \frac{2}{3}h^2y''(t_i) - \frac{2}{3}h^3y'''(t_i) + h^4(\dots) \\
 \tau_{i+1}(h) & = & & +h^4(\dots)
 \end{array}$$

Les termes en h^3 s'éliminent, on doit continuer le développement.

[Retour à l'exercice ▲](#)

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(t_i) + h^5(\dots) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) &= -y(t_i) + hy'(t_i) - \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) - \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(t_i) + h^5(\dots) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_i) &= -\frac{7}{3}hy'(t_i) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{i-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_i - h) &= \frac{2}{3}hy'(t_i) - \frac{2}{3}h^2y''(t_i) + \frac{2}{6}h^3y'''(t_i) - \frac{1}{9}h^4y^{(4)}(t_i) + h^5(\dots) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{i-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_i - 2h) &= -\frac{1}{3}hy'(t_i) + \frac{2}{3}h^2y''(t_i) - \frac{2}{3}h^3y'''(t_i) + \frac{4}{9}h^4y^{(4)}(t_i) + h^5(\dots) \\
 \tau_{i+1}(h) &= +h^5(\dots)
 \end{aligned}$$

Les termes en h^4 ne s'éliminent pas, on peut écrire le développement de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
 y(t_{i+1}) = y(t_i + h) &= y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) + \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(c_1) \\
 -y(t_{i-1}) = -y(t_i - h) &= -y(t_i) + hy'(t_i) - \frac{1}{2}h^2y''(t_i) + \frac{1}{6}h^3y'''(t_i) - \frac{1}{24}h^4y^{(4)}(c_2) \\
 -\frac{7}{3}hy'(t_i) &= -\frac{7}{3}hy'(t_i) \\
 \frac{2}{3}hy'(t_{i-1}) = \frac{2}{3}hy'(t_i - h) &= \frac{2}{3}hy'(t_i) - \frac{2}{3}h^2y''(t_i) + \frac{2}{6}h^3y'''(t_i) - \frac{1}{9}h^4y^{(4)}(c_3) \\
 -\frac{1}{3}hy'(t_{i-2}) = -\frac{1}{3}hy'(t_i - 2h) &= -\frac{1}{3}hy'(t_i) + \frac{2}{3}h^2y''(t_i) - \frac{2}{3}h^3y'''(t_i) + \frac{4}{9}h^4y^{(4)}(c_4) \\
 \tau_{i+1}(h) &= +h^4(\dots)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$|\tau_{i+1}(h)| \leq h^4 M \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{9} \right)$$

où M un majorant de $|y^{(4)}(t)|$ sur $[t_0, t_0 + T]$, on a donc

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{|\tau_{i+1}(h)|}{h} \leq \frac{23M}{36} h^3$$

Le schéma est donc d'ordre 3.

[Retour à l'exercice ▲](#)