Analyse numérique élémentaire

Chapitre 8 : Calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Juin 2007

Chapitre VIII

Détermination des valeurs propres et des vecteurs propres

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VIII.1 Rappels et notations

On rappelle que, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, le problème de calcul des valeurs propres consiste à trouver un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur y, $y \neq 0$, tel que

$$Ay = \lambda y.$$

Notations Dans tout ce chapitre on notera $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes ou non de A et on supposera désormais que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|,$$

λ_1 s'appelle la valeur propre *dominante* de A.

On supposera que la matrice A est diagonalisable, il existe donc une base de vecteurs propres que l'on notera $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$.

Le problème de la détermination des valeurs propres de A est équivalent à trouver les racines du polynôme caractéristique

$$P_A(s) = \det(sI - A).$$

On pourrait penser que le calcul numérique des valeurs propres se ramène au calcul numérique des racines d'un polynôme. En réalité c'est l'inverse qui se fait. En effet, étant donné un polynôme

$$p(t) = t^n + a_n t^{n-1} + a_{n-1} t^{n-2} + ... + a_2 t + a_1,$$

on peut démontrer (voir exercice de TD A.2.2) que ce polynôme est le polynôme caractéristique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices A qui ont la forme précédente s'appellent des matrices "Compagnon".

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VIII.2 Méthode de la puissance itérée - énoncé et hypothèses

Exercices :
Exercice A.1.1

La méthode de la puissance itérée est la suivante :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n, \\ x^{(k+1)} = \dfrac{Ax^{(k)}}{\left\|Ax^{(k)}\right\|},\ k \geq 0, \end{cases} \tag{VIII.1}$$

où $\|.\|$ désigne une norme quelconque.

Hypothèses et notations

– On suppose que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|.$$

On a donc que λ_1 est une valeur propre réelle simple (le montrer en exercice).

– On suppose que $x^{(0)}$ n'appartient pas au sous-espace engendré par les vecteurs propres $\{y^{(2)}, y^{(3)}, ..., y^{(n)}\}$.

– Soit p un indice tel que $y_p^{(1)} \neq 0$

Théorème VIII.1. *Sous les hypothèses précédentes, la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ générée par les relations (VIII.1) possède les propriétés suivantes :*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|Ax^{(k)}\right\| = |\lambda_1|,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

on a d'ailleurs plus précisément

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[Ax^{(k)}]_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1.$$

De plus la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ *converge vers un vecteur propre associé à* λ_1 *de la façon suivante :*

$$\lim_{k\to\infty} [sgn\,(\lambda_1)]^k x^{(k)} = \gamma y^{(1)}, \tag{VIII.2}$$

où γ *est une constante réelle.*

VIII.3 Méthode de la puissance itérée - convergence et remarques

On va maintenant démontrer le théorème VIII.1.
On démontre immédiatement que l'on a :

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|}. \qquad \text{(VIII.3)}$$

En effet cette propriété est vraie pour $k = 1$ par construction même de $x^{(1)}$, si l'on suppose que la propriété est vraie pour k, on a alors

$$x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\left\|Ax^{(k)}\right\|} = \frac{A\dfrac{A^k x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|}}{\left\|A\dfrac{A^k x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|}\right\|} = \frac{A^{k+1} x^{(0)}}{\left\|A^{k+1} x^{(0)}\right\|}.$$

En développant $x^{(0)}$ sur la base des vecteur propres on peut écrire

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y^{(i)},\ \xi_1 \neq 0.$$

On obtient alors

$$A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A^k y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \lambda_i^k y^{(i)} = \lambda_1^k \left(\xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right]^k y^{(i)} \right) = \lambda_1^k w^{(k)}, \qquad \text{(VIII.4)}$$

où l'on a posé

$$w^{(k)} = \xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=2}^{n} \xi_i \left[\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right]^k y^{(i)},$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

en utilisant (VIII.3) et (VIII.4) on obtient

$$x^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1^k|} \frac{w^{(k)}}{\left\|w^{(k)}\right\|} = \mathrm{sgn}\,(\lambda_1)^k \frac{w^{(k)}}{\left\|w^{(k)}\right\|}, \qquad \text{(VIII.5)}$$

or $\lim_{k\to\infty} w^{(k)} = \xi_1 y^{(1)}$, car $|\lambda_i/\lambda_1| < 1, \forall i > 1$, d'où

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{sgn}\,(\lambda_1)^k x^{(k)} = \gamma y^{(1)}, \text{ où } \gamma = \frac{\xi_1}{|\xi_1| \left\|y^{(1)}\right\|}.$$

De même d'après (VIII.3) et (VIII.4)

$$Ax^{(k)} = \frac{A^{k+1}x^{(0)}}{\left\|A^k x^{(0)}\right\|} = \frac{\lambda_1^{k+1} w^{(k+1)}}{|\lambda_1^k| \, \|w^k\|} = \lambda_1 \mathrm{sgn}\,(\lambda_1)^k \frac{w^{(k+1)}}{\left\|w^{(k)}\right\|} \qquad \text{(VIII.6)}$$

d'où

$$\left\|Ax^{(k)}\right\| = |\lambda_1| \frac{\left\|w^{(k+1)}\right\|}{\left\|w^{(k)}\right\|},$$

et donc $\lim_{k\to\infty} \left\|Ax^{(k)}\right\| = |\lambda_1|$.

On a de plus en utilisant (VIII.5) et (VIII.6)

$$\frac{(Ax^{(k)})_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1 \frac{w_p^{(k+1)}}{w_p^{(k)}}.$$

Or $\lim_{k\to\infty} w_p^{(k)} = \xi_1 y_p^{(1)}$ (non nul par hypothèse), donc

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[Ax^{(k)}]_p}{x_p^{(k)}} = \lambda_1$$

Quelques remarques :

- Si l'on a par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$ et $|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq ... \geq |\lambda_n|$, c'est à dire si la valeur propre dominante est double la démonstration est encore valide, il suffit d'écrire

$$x^{(0)} = \xi_1 y^{(1)} + \sum_{i=3}^{n} \xi_i y^{(i)},$$

  où $\xi_1 y^{(1)}$ est la composante de $x^{(0)}$ sur le sous espace propre associé à λ_1 (qui est ici de dimension 2).
  Ce serait encore valable si λ_1 était de façon générale multiple. Par contre si on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, alors la démonstration n'est pas valable, c'est ce qui se passe en particulier dans le cas des valeurs propres complexes.
- Dans la formule (VIII.2) apparaît le signe de λ_1, ce qui veut dire que, si λ_1 est négatif, alors les vecteurs $x^{(k)}$ oscillent entre les deux vecteurs $+\gamma y^{(1)}$ et $-\gamma y^{(1)}$. On verra en TD (exercice A.2.1) une variante de la méthode de la puissance itérée qui utilise la norme infinie judicieusement afin d'éviter ces oscillations.

VIII.4 Méthode de la puissance itérée inverse - principe

Si λ est valeur propre de A et que A est inversible, alors, de façon équivalente, λ^{-1} est valeur propre de A^{-1} et les vecteurs propres associés sont les mêmes. On a en effet

$$Ay = \lambda y \Longleftrightarrow y = \lambda A^{-1} y \Longleftrightarrow A^{-1} y = \lambda^{-1} y.$$

Par ailleurs définissons, pour q scalaire donné, la matrice

$$B = A - qI.$$

Cette matrice admet comme valeurs propres $\lambda_i - q$ où λ_i sont les valeurs propres de A, la matrice B^{-1} (si elle est définie, c'est-à-dire si q n'est pas valeur propre de A) admet pour valeurs propres

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i - q}.$$

En effet si z est vecteur propre de B^{-1} associé à $(\lambda_i - q)^{-1}$, il est vecteur propre de B, donc de A et il est évidemment associé à la valeur propre λ_i. Vérification :

$$\begin{aligned} B^{-1} z = (\lambda_i - q)^{-1} z \quad & \Longleftrightarrow \quad z = (\lambda_i - q)^{-1} B z \Longleftrightarrow Bz = (\lambda_i - q) z \Longleftrightarrow (A - qI) z = (\lambda_i - q) z \\ & \Longleftrightarrow \quad Az - qz = (\lambda_i - q) z \Longleftrightarrow Az = \lambda_i z. \end{aligned}$$

Soit A matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, soit q un réel et soit λ_j une valeur propre de A qui vérifie

$$0 < |q - \lambda_j| < |q - \lambda_i|, \ \forall\, i \neq j, \tag{VIII.7}$$

c'est à dire q n'est pas valeur propre de A et λ_j est la valeur propre la plus proche de q. Il résulte de (VIII.7) que la matrice B^{-1}

$$B^{-1} = (A - qI)^{-1}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

admet

$$\nu_1 = \frac{1}{\lambda_j - q}$$

comme valeur propre dominante. Donc pour q donné on peut s'inspirer de l'algoritme de la puissance itérée appliqué à B^{-1} ce qui permet d'obtenir ν_1, et on retrouve λ_j en posant

$$\lambda_j = \frac{1}{\nu_1} + q.$$

La méthode s'appelle méthode de la puissance itérée inverse.

VIII.5 Méthode de la puissance itérée inverse

Posons $B = A - qI$. On donne $x^{(0)}$ arbitraire (ou presque !) et on définit la suite $x^{(k+1)}$ par

$$\begin{cases} Bu^{(k+1)} = x^{(k)} \\ x^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k+1)}}{\left\|u^{(k+1)}\right\|}, \ k \geq 0. \end{cases} \tag{VIII.8}$$

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII.2. *Soit $q \in \mathbb{R}$ donné tel que $q \neq \lambda_i$, $\forall i$, et soit $B = A - qI$. Si le vecteur initial $x^{(0)}$ n'appartient pas au sous-espace engendré par $\left\{y^{(i)}\right\}_{i=1\ldots n, i\neq j}$ alors la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ générée par la méthode (VIII.8) possède les propriétés suivantes :*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|u^{(k)}\right\| = \left|\frac{1}{\lambda_j - q}\right|,$$

où λ_j est la valeur propre de A la plus proche de q. On a d'ailleurs plus précisément si $y_p^{(j)} \neq 0$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_p^{(k+1)}}{x_p^{(k)}} = \frac{1}{\lambda_j - q}.$$

De plus la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $y^{(j)}$ le vecteur propre de A associé à λ_j de la façon suivante :

$$\lim_{k\to\infty} \left[sgn\left(\frac{1}{\lambda_j - q}\right)\right]^k x^{(k)} = \gamma y^{(j)}, \tag{VIII.9}$$

où γ est une constante réelle.

On peut montrer que la méthode converge d'autant plus vite que $|q - \lambda_j|$ est petit devant $|q - \lambda_i|$, $\forall\, i \neq j$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

VIII.6 Les méthodes de déflation

Les méthodes précédentes permettent de déterminer une valeur propre et le vecteur propre associé, par exemple la méthode de la puissance itérée inverse permet de calculer la valeur propre de plus petite valeur absolue si elle est unique. Donc si l'on a déterminé par une méthode quelconque une valeur propre λ_1 (v.p. dominante par exemple), on peut songer à construire une matrice dans laquelle la valeur propre que l'on vient de déterminer n'est plus dominante et qui, par contre, possède toujours $(\lambda_j), j \neq 1$ comme valeurs propres. La méthode de la puissance (par exemple) permet alors de déterminer une nouvelle valeur propre dominante de la famille $(\lambda_j), j \neq 1$ et ainsi de suite. Cette procédure constitue ce qu'on appelle une méthode de déflation.

– 1^{er} cas : A symétrique.
  Supposons que l'on connaisse un vecteur propre y associé à la valeur propre λ avec $\|y\|_2 = 1$. Considérons alors la matrice
  $$B = A - \lambda y y^\top.$$
  Evidemment on a
  $$By = Ay - \lambda y y^\top y = \lambda y - \lambda y = 0.$$
  Par ailleurs si z est un autre vecteur propre de A associé à une autre valeur propre μ on a
  $$Bz = Az - \lambda y y^\top z = \mu z$$
  car $y^\top z = 0$ en vertu de l'orthogonalité des vecteurs propres.
– $2^{\text{ème}}$ cas : A quelconque (Méthode de *Duncan* et *Collar*)
  Soit A une matrice quelconque et supposons qu'on a obtenu un couple propre (λ, y) et supposons pour simplifier que la première composante de y est égale à 1. Notons $\underline{A}_1$ la première ligne de la matrice A, par définition du couple (λ, y) on a
  $$\underline{A}_1 y = \lambda y_1 = \lambda. \qquad \text{(VIII.10)}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définissons alors la matrice B par

$$B = A - y\underline{A}_1.$$

Alors la première ligne de B est nulle, en effet

$$\underline{B}_1 = \underline{A}_1 - y_1\underline{A}_1 = 0.$$

Par ailleurs, d'après (VIII.10) :

$$By = Ay - y\underline{A}_1 y = \lambda y - \lambda y = 0. \tag{VIII.11}$$

Si l'on suppose que les autres vecteurs propres de A ont leur première composante non nulle alors on peut les normaliser de façon à ce qu'elle soit égale à 1. Dans ces conditions si (μ, z) est un autre couple propre de A $(\mu \neq \lambda)$ on a $Az = \mu z$, donc

$$\underline{A}_1 z = \mu$$

et

$$B(z - y) = Bz = Az - y\underline{A}_1 z = \mu z - \mu y = \mu(z - y)$$

la première égalité étant une conséquence de (VIII.11). Les autres valeurs propres de B sont donc identiques à celles de A avec pour vecteurs propres associés $z - y$. Réciproquement si (μ, u) est un couple propre de B , si on suppose que $\mu \neq 0$ et que $\underline{A}_1 u = \mu - \lambda$ (ceci est toujours possible si $\underline{A}_1 u \neq 0$) alors :

$$A(u + y) = Bu + y\underline{A}_1 u + Ay = \mu u + (\mu - \lambda)y + \lambda y = \mu(u + y)$$

On vient de démontrer que $(u + y)$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ. Pour obtenir les couples propres de A autres que (λ, y) , on se ramène donc à rechercher les couples propres de B (valeur propre non nulle). Compte tenu de la structure particulière de B (sa première ligne étant nulle) on est ramené à un problème de calcul de valeurs propres dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre VIII

Exercice A.1.1

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{nn}$, si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres de A vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$, alors λ_1 est une valeur propre réelle et simple.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD du chapitre 8

Exercice A.2.1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, on cherche à déterminer la plus grande (à priori) valeur propre de A en module ainsi qu'un vecteur propre associé, pour cela on peut utiliser un algorithme inspiré de la méthode de la puissance itérée associé à la norme $\|.\|_\infty$. On se donne un vecteur x non nul et N un nombre maximal d'itérations, puis on applique l'algorithme :

   Déterminer p tel que $|x_p| = \|x\|_\infty$
   $x \leftarrow \frac{x}{x_p}$
   pour $k = 2$ jusqu'à N **faire**
       $y \leftarrow Ax$
       $\mu \leftarrow y_p$
       Déterminer p tel que $|y_p| = \|y\|_\infty$
       si $|y_p| < \varepsilon$ **alors**
           Arrêter l'algorithme et écrire 0 est valeur propre et x est vecteur propre
       sinon
           $E \leftarrow \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_\infty$
           $x \leftarrow \frac{y}{y_p}$
       fin si
       si $E < \varepsilon$ **alors**
           Arrêter l'algorithme et écrire μ est valeur propre et x est vecteur propre
       fin si
   fin pour

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

17: Ecrire : l'algorithme n'a pas convergé

(a) Appliquer l'algorithme précédent à $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en choisissant $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Même question en partant de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Même question en partant de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pourra montrer que les x obtenus sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^{-k} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Calculer exactement toutes les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
   (b) Justifier les résultats obtenus précédemment.

3. Etant donné q réel, on veut maintenant déterminer la valeur propre de A la plus proche de q, c'est à dire déterminer λ_i telle que
   $|\lambda_i - q| \leq |\lambda_j - q|, \ \forall j = 1, \dots, n$, on pose $\mu = \lambda_i$.
   (a) i. Montrer que $\mu - q$ est la valeur propre de plus petit module de $(A - qI)$.
       ii. Que vaut μ si q est valeur propre de A ?
       iii. Si q n'est pas valeur propre de A, montrer que $A - qI$ est alors inversible et que $\nu = (\mu - q)^{-1}$ est la plus grande valeur propre en module de $(A - qI)^{-1}$.
   (b) Montrer que l'algorithme de la puissance itérée pour trouver ν puis μ devient : on se donne un vecteur x non nul, N un nombre maximal d'itérations, et q réel puis on applique l'algorithme :

Exercice A.2.1

Sommaire
Concepts
Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1

Déterminer p tel que $|x_p| = \|x\|_\infty$
$x \leftarrow \frac{x}{x_p}$
pour $k = 2$ jusqu'à N **faire**
  Résoudre le système linéaire $(A - qI)y = x$
  si le système n'a pas de solution unique **alors**
    Arrêter l'algorithme et écrire q est valeur propre
  sinon
    $\nu \leftarrow y_p$
    Déterminer p tel que $|y_p| = \|y\|_\infty$
    $E \leftarrow \left\| x - \frac{y}{y_p} \right\|_\infty$
    $x \leftarrow \frac{y}{y_p}$
  fin si
  si $E < \varepsilon$ **alors**
    $\mu = \frac{1}{\nu} + q$
    Arrêter l'algorithme et écrire μ est valeur propre et x est vecteur propre.
  fin si
fin pour
Ecrire : l'algorithme n'a pas convergé

(c) i. On choisit $q = 3$, appliquer cet algorithme à la matrice A précédemment définie.

On partira de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ii. Même question en choisissant $q = 0$.

iii. Même question en choisissant $q = -1$, on partira de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice A.2.2

1. On dit que la matrice A est une matrice Compagnon, si elle s'écrit :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \end{pmatrix},$$
montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit :
$$p(\lambda) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda + a_1.$$

2. En déduire une méthode pour calculer la racine de plus grand module du polynôme
$$p(t) = t^n + a_n t^{n-1} + \ldots + a_2 t + a_1.$$

Exercice A.2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice dont on connaît une valeur propre non nulle λ^* et y^* un vecteur propre associé. On suppose que z est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $z^T y^* = 1$. On définit la matrice B de la façon suivante :

$$B = A - \lambda^* y^* z^T.$$

1. Montrer que y^* est un vecteur propre de B. Quelle est la valeur propre associée ?
2. Il existe au moins une composante de y^* non nulle, supposons que $y_p^* \neq 0$.

   (a) Montrer que l'on peut choisir $z^T = \dfrac{\underline{A}_p}{\lambda^* y_p^*}$.

   (b) Montrer que l'on a alors

   $$B = A - \frac{1}{y_p^*} y^* \underline{A}_p.$$

   (c) En déduire que la ligne p de B est nulle.
3. (a) On suppose que μ et x sont une valeur propre et un vecteur propre associé de B, on suppose que $\mu \neq 0, \mu \neq \lambda^*$, on définit

   $$y = (\mu - \lambda^*)x + \frac{\underline{A}_p x}{y_p^*} y^*.$$

   Montrer que $y \neq 0$, montrer que y est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   (b) On suppose que λ et y sont une valeur propre et un vecteur propre associé à A, on suppose que $\lambda \neq \lambda^*, \lambda \neq 0$, on définit

   $$x = y - \frac{y_p}{y_p^*} y^*.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Montrer que $x \neq 0$, montrer que x est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

(c) En déduire que si $\lambda \neq 0, \lambda \neq \lambda^*$

$$\{\lambda \text{ est valeur propre de } A\} \Leftrightarrow \{\lambda \text{ est valeur propre de } B\}$$

4. On définit C matrice extraite de B en supprimant la ligne p et la colonne p de B. Etant donné $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, on construit le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ de la façon suivante

$$x_i = v_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1, \ \ x_p = 0, \ \ x_i = v_{i-1} \text{ pour } p+1 \leq i \leq n.$$

Montrer que si $\mu \neq 0$
$$\{Cv = \mu v\} \Leftrightarrow \{Bx = \mu x\}.$$

5. On définit
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sachant que cette matrice a pour valeur propre $\lambda^* = 14$ et pour vecteur propre associé $y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, construire par la méthode précédente la matrice B et la matrice C, en déduire les autres valeurs propres et vecteurs propres de A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

D

P

R

Solution de l'exercice A.1.1

Si λ_1 était complexe non réelle, alors $\bar{\lambda}_1$ serait une autre valeur propre λ_2 et on aurait $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, ce qui est faux, donc λ_1 est réelle. Il est évident que λ_1 est simple.

Retour à l'exercice ▲