MT94 - Codage et dérivation

S. Mottelet

Université de Technologie de Compiègne

Plan

1. Codage des nombres réels
2. Approximation d'une dérivée
3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

1. Codage des nombres réels

Nombres réels dans une base b

Pour un entier $b \geq 2$ et $(e_k, m_k) \in [0, b-1]^2$, on note

$$(e_n\, e_{n-1} \dots e_0 . m_1 m_2 \dots)_b = \sum_{k=0}^{n} e_k b^k + \sum_{k>0} m_k b^{-k}$$

Exemples :

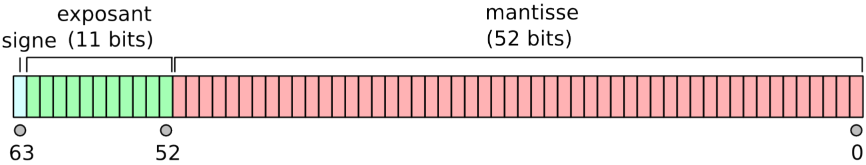
- $12.1 \overset{def}{=\!=} (12.1)_{10} = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1}$
- $(101.11)_2 = 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 5.75$
- $(1f)_{16} = 1 \times 16 + 15 = 31$

  Notation : $0.3 = (0.0100110011 0011...)_2 \overset{def}{=\!=} (0.01\overline{0011})$

1. Codage des nombres réels

Norme IEEE 754 (depuis 1985)

Nombre à virgule flottante codé sur 64 bits



$$x = (-1)^s (1.m_1 m_2 \ldots m_{52})_2 \times 2^{e-1023}$$

Exemple : codage de 12.1

1. Codage des nombres réels

Norme IEEE 754 (depuis 1985)

$$12.1 = 1.5125 \times 2^3 = (1.1000\overline{0011})_2 \times 2^3$$

$$x = (0.m_1 m_2 \ldots)_2 = \sum_{k>0} m_k 2^{-k}$$

Algorithme

$$x_1 = x, \text{ et pour } k > 0$$

$$\begin{aligned} m_k &= \lfloor 2x_k \rfloor, \\ x_{k+1} &= 2x_k - m_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.5125 \times 2 &= 1.025 \\ 0.025 \times 2 &= 0.05 \\ 0.05 \times 2 &= 0.1 \\ 0.1 \times 2 &= 0.2 \\ 0.2 \times 2 &= 0.4 \\ 0.4 \times 2 &= 0.8 \\ 0.8 \times 2 &= 1.6 \\ 0.6 \times 2 &= 1.2 \\ 0.2 \times 2 &= \ldots \end{aligned}$$

1. Codage des nombres réels

Norme IEEE 754 (depuis 1985)

$$12.1 = (1.1000\overline{0011})2^{1026-1023}$$

Dans scilab :

```
-> bitstring(12.1)
ans =

"0100000000101000001100110011001100110011001100110011001100110011"
```

Attention : en pratique, l'encodage fait appel à des calculs sur des nombres entiers.

1. Codage des nombres réels

Calculs, précision relative

- Addition de deux nombres $x > y$:

$$x = (1.m_1 \dots m_{52})_2 \times 2^{e-1023},$$
$$y = (1.n_1 \dots n_{52})_2 \times 2^{f-1023},$$

On doit additionner $e - f$ à l'exposant de y et diviser sa mantisse par 2^{e-f} :

$$y \text{ est codé } (0.0 \dots 01 n_1 \dots n_{52-e+f})_2 \times 2^{e-1023}$$

$e - f = 52$:

$$y \text{ est codé } (0.0 \dots 01) \times 2^{e-1023}$$

$e - f = 53$:

$$y \text{ est codé } 0.$$

1. Codage des nombres réels

Calculs, précision relative, dans Scilab

```
--> for k=1:53, disp(bitstring(1+2^-k)), end
```

```
"0011111111111000000000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110100000000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110010000000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110001000000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110000100000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110000010000000000000000000000000000000000000000000000"
"0011111111110000001000000000000000000000000000000000000000000000"
⋮
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000010000000"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000001000000"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000100000"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000010000"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000001000"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000000100"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000000010"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000000001"
"0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000000000"
```

1. Codage des nombres réels

Précision relative, dans Scilab

$$\varepsilon = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$$

ε = plus petit nombre tel que $x + \varepsilon x \neq x$
ε = précision relative

1. Codage des nombres réels

Perte de signification ou *catastrophic cancellation*

Calcul de $x - y$ quand les deux nombres sont proches :

```
-> x=cos(1); y=cos(1+2^-26); bitstring([x;y;x-y])

ans =

"0011111111100001010010100010100000001111011010100000110100011 00"
"0011111111100001010010100010100000001000111110011011000101101000"
"0011111001001010111011010101001001000000000000000000000000000000"
```

Perte de précision de 25 bits sur 52 !

2. Approximation d'une dérivée

La théorie et la pratique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable deux fois, on a pour tout $h \neq 0$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2} f''(\xi),\ \xi \in \mathrm{Int}(x, x+h),$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi).$$

En pratique, on calcule en machine $D(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \delta$ où

$$|\delta| \leq 2\varepsilon \left| \frac{f(x)}{h} \right|,$$

d'où pour h, il existe $\xi \in \mathrm{Int}(x, x+h)$ tel que

$$|f'(x) - D(h)| \leq 2\varepsilon \left| \frac{f(x)}{h} \right| + \left| \frac{h}{2} f''(\xi) \right|.$$

2. Approximation d'une dérivée

La théorie et la pratique

Le h optimal peut être approché par

$$h^* = 2\left|\varepsilon\frac{f(x)}{M_2}\right|^{1/2},$$

où $|f''(x)| \leq M_2$ pour tout x.

Exercice : calculez h^* pour la formule d'ordre 2 :

$$D_2(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

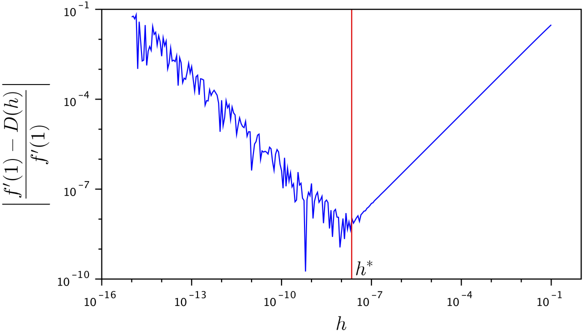
2. Approximation d'une dérivée

Exemple

Approximation de $f'(1)$ quand $f(x) = \cos(x)$: $D(h) = \frac{\cos(1+h) - cos(1)}{h}$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow M_2 = \max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| = 1$$

$$h^* = 2(2^{-52}\cos(1))^{1/2} \approx 2.19 \times 10^{-8}$$



3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Fonction développable en série

Définition : on dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en série en x_0 s'il existe (a_n) et $R > 0$ tels que si $|x - x_0| < R$ alors

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Pour toute fonction développable en série on peut définir son extension/prolongement au plan complexe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - x_0)^n.$$

L'analyse complexe est une branche des mathématiques étudiant, entre autres, les propriétés de telles fonctions.

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Prolongement complexe

Exemples avec $x_0 = 0$:

$$\exp z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

qui se calculent en pratique, pour x et y réels comme

$$\exp(x + iy) = \exp x \cos y + i \exp x \sin y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Prolongement complexe, dans Scilab

- opérateurs $+, *, /, \wedge$ sur les scalaires, vecteurs et matrices,
- fonctions usuelles (trigo., hyperboliques, réciproques, ...)

```
--> (1+%i)*(1+2*%i)
ans =

-1. + 3.i

--> cos(1+%i)
ans =

0.83373 - 0.9888977i

--> 2^(1+%i)
ans =

1.5384778 + 1.2779226i
```

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Approximation d'une dérivée avec un pas complexe

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x_0 + ih) = f(x_0) + ihf'(x_0) - \frac{h^2}{2} f''(x_0) + O(ih^3),$$

$$\mathrm{Im}(f(x_0 + ih)) = hf'(x_0) + O(h^3),$$

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{Im}(f(x_0 + ih))}{h} + O(h^2),$$

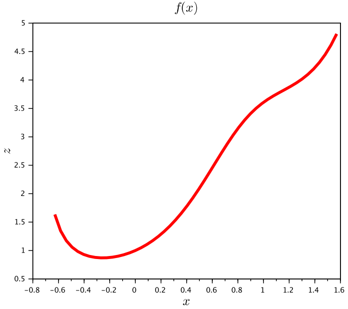
à comparer avec une autre formule d'ordre 2 :

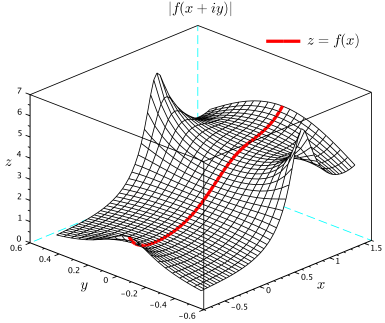
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + O(h^2),$$

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Exemple

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$





3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Exemple

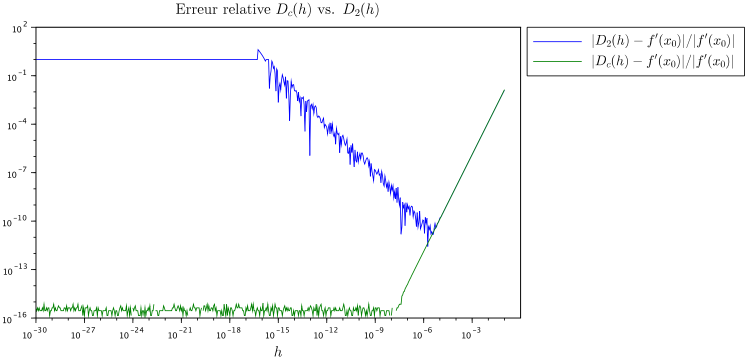
$$f'(x) = \exp(x)\frac{\cos^3 x + 3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x + sin^3 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2},$$

Approximation de $f'(pi/4)$

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Exemple

$$D_2(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}, \quad D_c(h) = \frac{\mathrm{Im}(f(x_0+ih))}{h}$$



3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Perspectives

En prenant un minimum de précautions, il est possible de calculer, à la précision machine, les dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ calculée par n'importe quel programme Scilab.

Où est cachée la dérivée dans les fonctions usuelles prolongées à $\mathbb{C}$?

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 &= (x^2 - y^2 + 2ixy), \\ \mathrm{Im}((x+iy)^2) &= 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \mathrm{Im}(\cos(x+iy)) &= -\sin x \sinh y \end{aligned}$$

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Perspectives

L'utilisation du pas complexe est équivalente à l'utilisation de l'algèbre des nombres duals.

Pour les dérivées d'ordre supérieur, on peut utiliser les nombres hyper-duals.

Toutes ces techniques sont liées à la différentiation automatique.

3. Un pas de côté (dans le plan complexe)

Références

- Codage IEEE 754

  https://fr.wikipedia.org/wiki/IEEE_754
- Pas complexe

  https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01483287/document
- Nombres duals et hyper-duals

  https://www.osti.gov/servlets/purl/1368722
- Différentiation automatique

  https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_differentiation