MT94/P25/TD1 - Approximation d'une dérivée et pas complexe

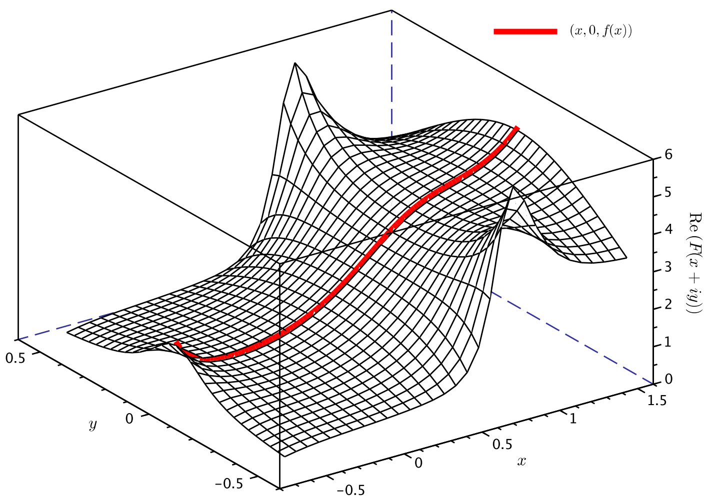

FIGURE 1 – Graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (en gras) et de la partie réelle de son extension complexe

1 Approximation basée sur des différences finies

On considère la fonction $x \to f(x)$ calculée par la fonction Scilab suivante :

```
function y7 = f(x)
   y1 = exp(x);
   y2 = cos(x);
   y3 = sin(x);
   y5 = y2.^3;
   y6 = y3.^3;
   y7 = y1./(y5+y6);
end
```

1. Tracer le graphe de f sur $[-\pi/5, \pi/2]$ avec Scilab .
2. Vérifier que $f(x) = \frac{\exp(x)}{\cos^3 x + \sin^3 x}\cdot$, puis calculer sa dérivée "à la main" ou en utilisant Wolfram Alpha (voir [3]).
3. On considère une approximation de la dérivée de f pour $x_0 \in \mathbb{R}$ par la fonction $D_1 : [-\pi/5, \pi/2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$D_1(x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\cdot$$
Soit $x_0 = \pi/4$, écrire un programme Scilab permettant de vérifier que :
   (a) pour h suffisamment petit (mais pas trop), $D_1(x_0, h)$ est une approximation d'ordre 1 de $f'(x_0)$, c'est à dire que $f'(x_0) - D_1(x_0, h) = O(h)$ (un infiniment petit d'ordre 1). Pour cela on pourra tracer le graphe de l'erreur relative
$$E_1(h) = \left| \frac{f'(x_0) - D_1(x_0, h)}{f'(x_0)} \right|$$

pour des valeurs entre 10^{-20} et 10^{-1}. L'utilisation de l'échelle logarithmique est recommandée (utiliser la propriété `log_flags` du système d'axes renvoyé par `gca()`).

(b) il existe une valeur optimale h^* telle que

$$\forall h \in \mathbb{R},\ E_1(h^*) \leq E_1(h),$$

pour laquelle la précision relative maximale (donnée par `%eps`) n'est pas atteinte par $E_1(h^*)$,

(c) si h est trop petit la précision relative obtenue est à peu près aussi mauvaise que pour un h trop grand.

4. Refaire l'analyse de la question précédente en considérant les deux premières formules centrées (voir [2]) et commenter les résultats.

2 Méthode du pas complexe

On considère $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'extension de f au plan complexe définie par

$$F(z) = \frac{\exp(z)}{\cos^3 z + \sin^3 z}. \tag{1}$$

1. Vérifier que la fonction Scilab calculant $f(x)$ pour x réel accepte sans problème un argument d'entrée complexe.
2. Représenter[1] dans l'espace le graphe de la fonction $(x,y) \to \mathrm{Re}(F(x+iy))$ définie par l'algorithme ou par (1) sur $[-\pi/5,\pi/2] \times [-1/2,1/2]$ ainsi que la courbe $x \to (x,0,f(x))$ pour $x \in [-\pi/5,\pi/2]$ (voir la figure 1 pour le type de représentation demandé). Comment proposeriez-vous de représenter l'argument sur le même graphe ? Proposez d'autres modes de représentation.
3. On considère l'approximation de la dérivée de f pour $x_0 \in \mathbb{R}$ par la fonction $D_c : [-\pi/5,\pi/2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$D_c(x_0,h) = \frac{\mathrm{Im}(F(x_0+ih))}{h}.$$

et

$$E_c(h) = \left| \frac{f'(x_0) - D_c(x_0,h)}{f'(x_0)} \right|$$

Soit $x_0 = \pi/4$, écrire un programme Scilab permettant de vérifier que :

(a) pour h suffisamment petit (mais pas trop), $D_c(x_0,h)$ est une approximation d'ordre 2 de $f'(x_0)$, c'est à dire que $f'(x_0,h) - D_c(x_0,h) = O(h^2)$ (un infiniment petit d'ordre 2).

(b) il existe une valeur $\hat{h}$ telle que

$$\forall h < \hat{h},\ E_c(h) \approx \delta$$

où δ est d'une magnitude (puissance de 10) du même ordre que celui de la précision relative de Scilab.

4. Calculer et représenter l'approximation de la dérivée de f sur tout son domaine de définition (le plus simplement possible).

Références

[1] J. Martins, P. Sturdza, J. Alonso, The complex-step derivative approximation, *ACM Transactions on Mathematical Software, Association for Computing Machinery*, 2003, 29, pp.245 -262, `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01483287`

[2] Finite difference coefficient, `https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient`

[3] Wolfram Alpha, `https://www.wolframalpha.com`