



FIGURE 1 – Graphe d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (en gras) et de la partie réelle de son extension complexe

## 1 Approximation basée sur des différences finies

On considère la fonction  $x \rightarrow f(x)$  calculée par la fonction Scilab suivante :

```

function y7 = f(x)
  y1 = exp(x);
  y2 = cos(x);
  y3 = sin(x);
  y5 = y2.^3;
  y6 = y3.^3;
  y7 = y1./(y5+y6);
end
    
```

1. Tracer le graphe de  $f$  sur  $[-\pi/5, \pi/2]$  avec Scilab .
2. Vérifier que  $f(x) = \frac{\exp(x)}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ ; puis calculer sa dérivée "à la main" ou en utilisant Wolfram Alpha (voir [3]).
3. On considère une approximation de la dérivée de  $f$  pour  $x_0 \in \mathbb{R}$  par la fonction  $D_1 : [-\pi/5, \pi/2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$D_1(x_0, h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Soit  $x_0 = \pi/4$ , écrire un programme Scilab permettant de vérifier que :

- (a) pour  $h$  suffisamment petit (mais pas trop),  $D_1(x_0, h)$  est une approximation d'ordre 1 de  $f'(x_0)$ , c'est à dire que  $f'(x_0) - D_1(x_0, h) = O(h)$  (un infiniment petit d'ordre 1). Pour cela on pourra tracer le graphe de l'erreur relative

$$E_1(h) = \left| \frac{f'(x_0) - D_1(x_0, h)}{f'(x_0)} \right|$$

pour des valeurs entre  $10^{-20}$  et  $10^{-1}$ . L'utilisation de l'échelle logarithmique est recommandée (utiliser la propriété `log_flags` du système d'axes renvoyé par `gca()`).

(b) il existe une valeur optimale  $h^*$  telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}, E_1(h^*) \leq E_1(h),$$

pour laquelle la précision relative maximale (donnée par `%eps`) n'est pas atteinte par  $E_1(h^*)$ ,

(c) si  $h$  est trop petit la précision relative obtenue est à peu près aussi mauvaise que pour un  $h$  trop grand.

4. Refaire<sup>1</sup> l'analyse de la question précédente en considérant les deux premières formules centrées (voir [2]) et commenter les résultats.

## 2 Méthode du pas complexe

On considère  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  l'extension de  $f$  au plan complexe définie par

$$F(z) = \frac{\exp(z)}{\cos^3 z + \sin^3 z}. \quad (1)$$

1. Vérifier que la fonction Scilab calculant  $f(x)$  pour  $x$  réel accepte sans problème un argument d'entrée complexe.
2. Représenter<sup>1</sup> dans l'espace le graphe de la fonction  $(x, y) \rightarrow \operatorname{Re}(F(x + iy))$  définie par l'algorithme ou par (1) sur  $[-\pi/5, \pi/2] \times [-1/2, 1/2]$  ainsi que la courbe  $x \rightarrow (x, 0, f(x))$  pour  $x \in [-\pi/5, \pi/2]$  (voir la figure 1 pour le type de représentation demandé). Comment proposeriez-vous de représenter l'argument sur le même graphe? Proposez d'autres modes de représentation.
3. On considère l'approximation de la dérivée de  $f$  pour  $x_0 \in \mathbb{R}$  par la fonction  $D_c : [-\pi/5, \pi/2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$D_c(x_0, h) = \frac{\operatorname{Im}(F(x_0 + ih))}{h}$$

et

$$E_c(h) = \left| \frac{f'(x_0) - D_c(x_0, h)}{f'(x_0)} \right|$$

Soit  $x_0 = \pi/4$ , écrire un programme Scilab permettant de vérifier que :

- (a) pour  $h$  suffisamment petit (mais pas trop),  $D_c(x_0, h)$  est une approximation d'ordre 2 de  $f'(x_0)$ , c'est à dire que  $f'(x_0, h) - D_c(x_0, h) = O(h^2)$  (un infiniment petit d'ordre 2).
- (b) il existe une valeur  $\hat{h}$  telle que

$$\forall h < \hat{h}, E_c(h) \approx \delta$$

où  $\delta$  est d'une magnitude (puissance de 10) du même ordre que celui de la précision relative de Scilab.

4. Calculer et représenter l'approximation de la dérivée de  $f$  sur tout son domaine de définition (le plus simplement possible).

## Références

- [1] J. Martins, P. Sturdza, J. Alonso, The complex-step derivative approximation, *ACM Transactions on Mathematical Software, Association for Computing Machinery*, 2003, 29, pp.245 -262, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01483287>
- [2] Finite difference coefficient, [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient)
- [3] Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com>

---

1. La totalité de cette question peut être traitée en autonomie après le TD.