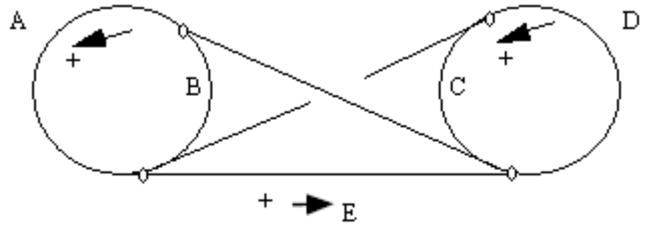
Roφ3

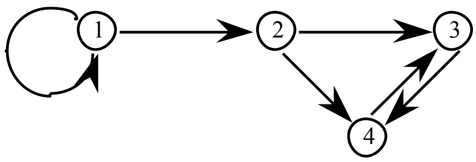
TD3

<u>Exercice 1 :</u> Soit un train électrique dont le circuit est le suivant :



Chaque aiguillage a 2 ou 3 positions. On a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quel que soit l'état initial, le tronçon E n'est jamais emprunté par le train. Expliquer cela à l'aide d'un graphe à 10 sommets.

<u>Exercice 2 :</u> Soit G = (X,U), un graphe orienté et B la matrice d'adjacence sommet-sommet associée à G. On prendra comme exemple le graphe suivant :



2.0 : Calculer B, B^2, B^3, B^4, (I+B), $(I+B)^2$, $(I+B)^3$, $(I+B)^4$, pour l'exemple ci-dessus, où la matrice B est booléenne (on utilisera les opérations booléennes).

On se place maintenant dans le cas général.

2.1 : Si B^k est le produit matriciel Booléen de B par B^{k-1}, montrer que:

$$\{B^k\}_{ij} = 1 \text{ s'il existe un chemin de k arcs entre i et j et 0 sinon.}$$

2.2 : On pose :

$$\hat{B}_k = I + B + B^2 + ... + B^k.$$

Montrer que :

$\{\hat{B}_k\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin de k arcs au plus entre i et j et 0 sinon.

Montrer que l'on peut définir $\hat{B} = \lim \hat{B}_k$ pour k tend vers $\propto$.

2.3 : On pose de même $\hat{C}_k = I + C + C^2 + ... + C^k$ où $C = B^T$. Montrer que la limite $\hat{C}$ existe et que :

$$\{\hat{C}\}_{ij} = 1 \text{ s'il existe un chemin entre j et i et 0 sinon.}$$

2.4 : Déduire de ce qui précède une méthode pour décomposer G en composantes fortement connexes. Evaluer la complexité de cette méthode après avoir rappelé la complexité de la multiplication de deux matrices carrées.

2.5 : Proposer une méthode pour chercher les composantes connexes du graphe en transformant le graphe de départ.

2.6 : On se propose d'améliorer cette méthode.

Démontrer l'identité $(I+B)^k = I + B + B^2 + \ldots\ldots + B^k$.

Montrer que la suite $\{B(1) = I+B,\ B(k)=(B(k-1))^2 \text{ pour } k>1\}$ converge vers $\acute{B}$ en un nombre fini d'étapes que l'on évaluera.

En déduire un meilleur algorithme que celui obtenu en 2.4. On en précisera l'ordre.

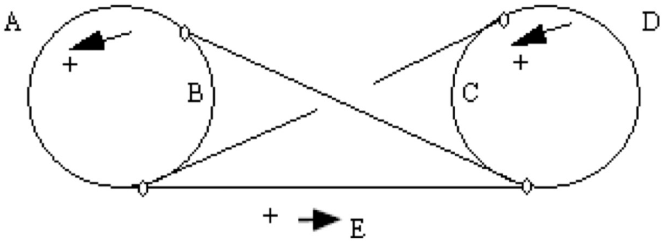
2.7 : Que se passe-t-il si l'on remplace le produit Booléen par le produit usuel ?

Exercice 3 :

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré est dit régulier. Quelles sont les graphes non orientés réguliers de degré 1 ? de degré 2 ?

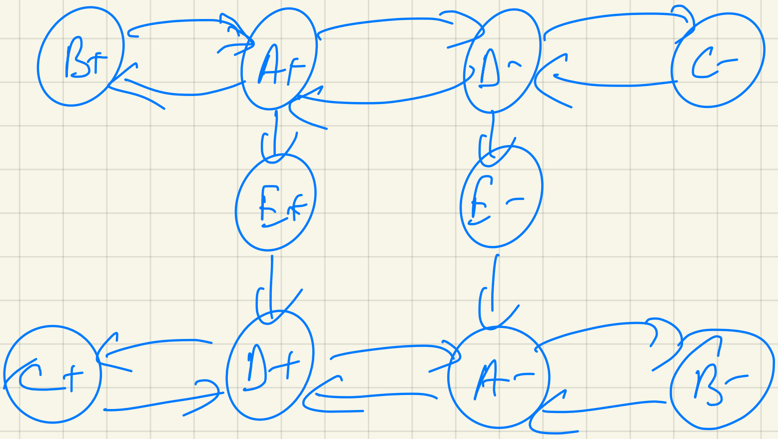
Exercice 4 : Combien y a-t-il des graphes orientés à quatre sommets ?

Exercice 1 : Soit un train électrique dont le circuit est le suivant :



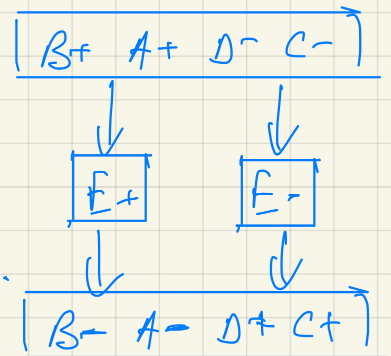
Chaque aiguillage a 2 ou 3 positions. On a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quel que soit l'état initial, le tronçon E n'est jamais emprunté par le train. Expliquer cela à l'aide d'un graphe à 10 sommets.

Solution : On peut représenter les divers états des mouvements par des sommets et les passages d'un état à l'autre par des arcs. Ainsi l'état où le train se trouve à la position A en suivant la direction + donne le sommet A+.
Ainsi on obtient :

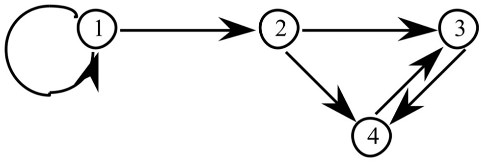


On remarque qu'une fois passé par E+ ou E- on rentre dans un état stationnaire ne permettant pas d'emprunter le tronçon E.

On peut remarquer cela aussi par le graphe réduit donné ci-dessous :



Exercice 2 : Soit G = (X,U), un graphe orienté et B la matrice d'adjacence sommet-sommet associée à G. On prendra comme exemple le graphe suivant :



2.0 : Calculer B, B^2, B^3, B^4, (I+B), $(I+B)^2$, $(I+B)^3$, $(I+B)^4$, pour l'exemple ci-dessus, où la matrice B est booléenne (on utilisera les opérations booléennes).

$$B = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$B^2 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} * \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B^3 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad B^4 = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = B^{2k} \text{ pour tout } k>0.$$

2.1 : Si B^k est le produit matriciel Booléen de B par B^{k-1}, montrer que:

$\{B^k\}_{ij}$ = 1 s'il existe un chemin de k arcs entre i et j et 0 sinon.

2.1 Hypothèse de recurrence : $B^k_{ij} = 1$ si et seulement si il existe un chemin de i vers j de k arcs.

On démontrera la propriété par recurrence sur le nombre k.

La propriété est vraie pour $k=1$. On suppose la propriété vraie à l'ordre k et démontrons la pour $k+1$.

Demontrons $\Rightarrow$: $B^{k+1}_{ij} = 1 \Leftrightarrow \sum_{l=1}^{n} B^k_{il} * B_{lj} = 1 \Rightarrow \exists\, l$ tel que $B^k_{il} = 1$ et $B_{lj} = 1$. $\Rightarrow \exists$ un chemin μ de i vers l de k arcs (selon l'hypothèse de recurrence), et l'arc (l,j). $\Rightarrow \exists$ un chemin de i vers j de k+1 arcs composé de la concaténation de μ avec (l,j).

Demontrons maintenant la réciproque : Soit μ un chemin de i vers j de k+1 arcs. Notons l l'avant-dernier sommet du chemin. Selon l'hypothèse $B^k_{(i,l)} = 1$ et $B_{lj} = 1 \Rightarrow B^k_{il} * B_{lj} = 1 \Rightarrow B^{k+1}_{ij} = 1$.

2.2 : On pose :

$$\acute{B}_k = I + B + B^2 + \ldots\ldots + B^k.$$

Montrer que :

$\{\acute{B}_k\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin de k arcs au plus entre i et j et 0 sinon.

Montrer que l'on peut définir $\acute{B} = \lim \acute{B}_k$ pour k tend vers ∞.

La propriété énoncée ci-dessous peut directement être déduite de la propriété du 2.1 et définition de B'_K.

On remarque que pour $K \geq n-1$ $B'_K = B'_{n-1}$.

En effet, on remarque que si $\{B'_{n-1}\}_{ij} = 1$ alors nécessairement $\{B'_K\}_{ij} = 1$ pour tout $K \geq n-1$.

Réciproquement si $\{B'_K\}_{ij} = 1$, alors il existe un chemin de i vers j d'au plus K arcs. Selon le lemme de Koenig on peut extraire un chemin élémentaire de i vers j, donc il existe un chemin de longueur $\leq n-1$ de i vers j $\Rightarrow \{B'_{n-1}\}_{ij} = 1$.

On en déduit alors que la suite $B'_{K\,K\to\infty}$ est une suite constante à partir de $K = n-1$, donc on en déduit que $B' = \lim_{K\to\infty} B'_K = B'_{n-1}$.

On remarque en revanche que la matrice B^k ne converge pas vers une limite connue.

FIN

2.3 : On pose de même $\acute{C}_k = I + C + C^2 + \ldots\ldots + C^k$ où $C = B^T$. Montrer que la limite $\acute{C}$ existe et que :

$\{\acute{C}\}_{ij} = 1$ s'il existe un chemin entre j et i et 0 sinon.

On remarque que $C = B^T$ correspond à la matrice associée du même graphe mais avec les arcs inversés. On peut ensuite calculer C' de la même façon que B' et trouver ainsi les ascendants à la place des descendants mais cela ne présente pas beaucoup d'intérêt parce que $C' = (B')^T$.

2.4 : Déduire de ce qui précède une méthode pour décomposer G en composantes fortement connexes. Evaluer la complexité de cette méthode après avoir rappelé la complexité de la multiplication de deux matrices carrées.

La méthode consiste à calculer $B' = B'_{n-1}$ et déduire les composantes fortement connexes d'un sommet i en lisant la ligne i (descendants) et colonne i (ascendants). Clairement la complexité de la méthode réside dans le calcul $B' = B'_{n-1} = I + B + B^2 + \dots + B^{n-1}$. Chaque terme de la somme, B^k, peut être calculé comme $B^{k-1} * B$.
Donc chaque terme de la somme coûte "un produit matriciel" $= O(n^3)$. La complexité globale serait alors de $\underline{O(n^4)}$ car le reste des opérations (déduction des composante fortement connexe) correspond à la lecture d'une matrice, donc $O(n^2)$.

2.5 : Proposer une méthode pour chercher les composantes connexes du graphe en transformant le graphe de départ.

Il suffit de dédoubler les arcs du graphe initial, c'est-à-dire pour tout arc (i,j) dans le graphe G mettre (i,j) e (j,i) dans un graphe G'. Ensuite il peut être verifiée facilement que les composantes connexes du graphe G coïncident avec les composantes fortement connexe du graphe G'.

2.6 : On se propose d'améliorer cette méthode.

Démontrer l'identité $(I+B)^k = I + B + B^2 + \ldots\ldots + B^k$.

Montrer que la suite $\{B(1) = I+B,\ B(k)=(B(k-1))^2$ pour $k>1\}$ converge vers B' en un nombre fini d'étapes que l'on évaluera.

En déduire un meilleur algorithme que celui obtenu en 2.4. On en précisera l'ordre.

On démontrera la validité de la relation par récurrence sur le nombre K.

La relation est vraie pour $K=1$: $(\underline{I}+B)^1 = \underline{I}+B$.

Supposant la rélation vraie pour K et démontrons la pour K+1 : $(\underline{I}+B)^{K+1} = (\underline{I}+B)^K(\underline{I}+B) =$

$$= \underbrace{(\underline{I}+B+B^2+\cdots+B^K)}_{\text{selon l'hypothèse de récurrence}}(\underline{I}+B) = \underline{I}+B+B+B^2+B^2+\cdots+B^K+B^K+B^{K+1} =$$

$$= \underline{I}+B+B^2+\cdots+B^K+B^{K+1} \quad \text{car } B^K+B^K=B^K$$

pour tout K car il s'agit d'un opérateur booléen.

Ensuite, on remarque que $B(1) = \underline{I}+B$, $B(2)=(B(1))^2=(\underline{I}+B)^2$, $B(3)=(B(2))^2=(\underline{I}+B)^4=(\underline{I}+B)^{2^2}$ ... $B(k)=(B(k-1))^2=(\underline{I}+B)^{2^{k-1}}$. On pourra alors s'arrêter au premier k tel que $2^{k-1} \geq n-1 \Rightarrow k-1 \geq \log(n-1)$ car nous savons que $(\underline{I}+B)^{2^{k-1}} = B'^{2^{k-1}} = B'_{n-1}$ pour tout k tel que $2^{k-1} \geq n-1$.

Donc on peut déduire qu'il faudra $k \approx O\log(n)$ calcul de $B(i), 1 \leq i \leq k$

$\Rightarrow$ il faudra $O(\log(n))$ calcul matricielle pour obtenir B' donc complexité globale est de $O(n^3\log(n))$ au lieu de $O(n^4)$.

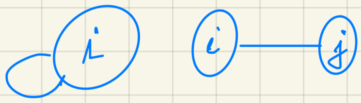
2.7 : Que se passe-t-il si l'on remplace le produit Booléen par le produit usuel ?

B^K donnera le nombre de chemins de longueur K.

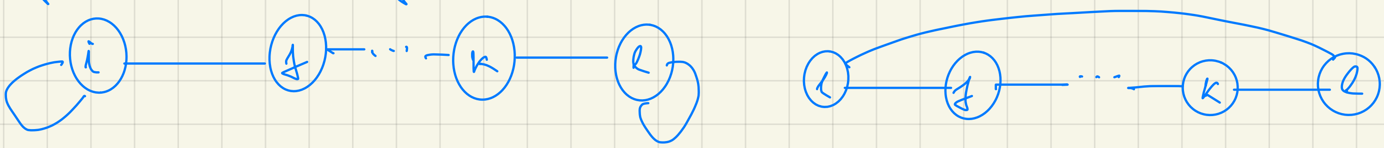
Exercice 3 :

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré est dit régulier. Quelles sont les graphes non orientés réguliers de degré 1 ? de degré 2 ?

Tout graphe composé des graphes ci-dessous est un graphe regulier de degrée 1.



Tout graphe composé des graphes comme ci-dessous est un graphe regulier de degrée 2.



Exercice 4 : Combien y a-t-il des graphes orientés à quatre sommets ?

Il y a exactement $2^{16} = 65536$

En fait il y a au plus 16 arcs différents (boucles comprises).
Alors les graphes qu'on peut construire diffèrent entre eux des arcs qui les composent, donc il y a autant de graphes différent que de sous-ensembles d'arcs qui pourront être créés avec 16 arcs.