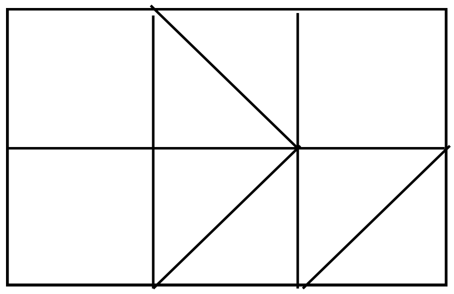
RO03

Correction TD6

<u>Exercice 1</u> : Déterminer une chaîne eulérienne dans le graphe suivant :



<u>Exercice 2</u> : Méthode arborescente :

Cinq personnes de nationalités différentes habitent les cinq premières maisons d'une rue, toutes sur le même trottoir (numérotées de 1 à 5).

Elles exercent cinq professions différentes et ont chacune une boisson et un animal favori tous différents. Les cinq habitations sont de cinq couleurs différentes.

1 : L'anglais habite la maison rouge.
2 : L'espagnol possède un chien.
3 : Le japonais est peintre.
4 : L'italien boit du thé.
5 : Le norvégien habite la première maison à gauche.
6 : Le propriétaire de la maison verte boit du café.
7 : Cette maison verte est immédiatement à droite de la blanche.
8 : Le sculpteur élève des escargots.
9 : Le diplomate habite la maison jaune.
10 : On boit du lait dans la maison du milieu.
11 : Le norvégien habite à coté de la maison bleue.
12 : Le violoniste boit des jus de fruits.
13 : Le renard est dans une maison voisine du médecin.
14 : Le cheval, à côté de celle du diplomate.

Qui élève le zèbre et qui boit de l'eau ?
(Attribué à Lewis Carrol)

<u>Exercice 3 :</u>

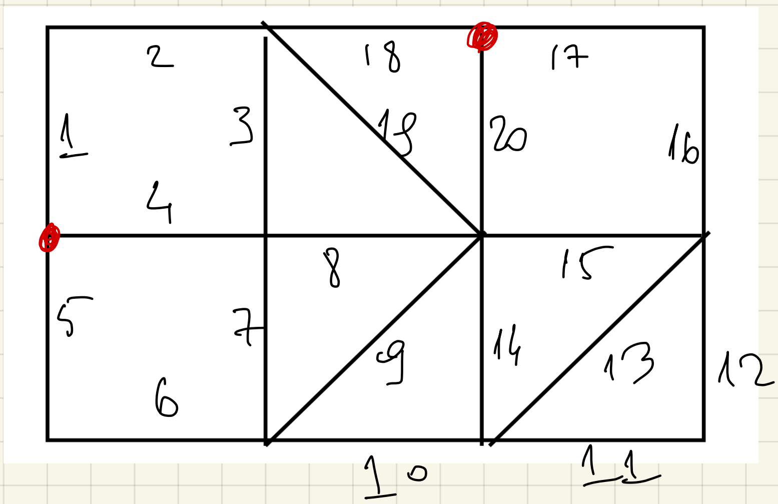
Résoudre le problème de décodage suivant :

$$
\begin{array}{rr}
 & F\,O\,R\,T\,Y \\
+ & T\,E\,N \\
+ & T\,E\,N \\
\hline
 & S\,I\,X\,T\,Y
\end{array}
$$

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que F, T et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

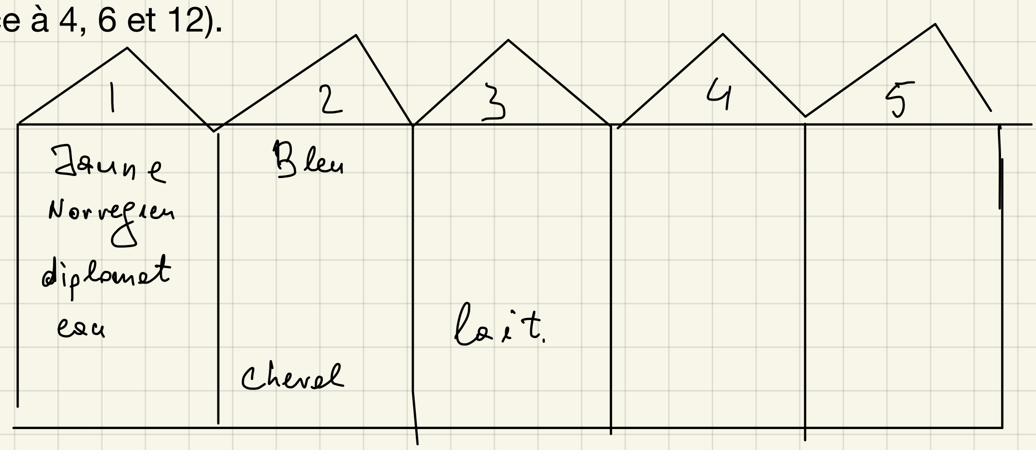
1. Rappel : (Polycopié, page 15)

Théorème d'Euler : Un multigraphe simple (sans boucle) G admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe (“d'un seul tenant”) et si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Dans le graphe suivant il n’y a que deux sommets de dégrée impair, ce qui implique qu’une chaîne euléirenne existe et que ces deux sommes seraient les extrémités de la chaîne. Ils sont marqués en rouge sur la figure ci-dessous. Un exemple de chaîne eulérienne est donné sur le graphe, (d’autres chaînes peuvent être construites).



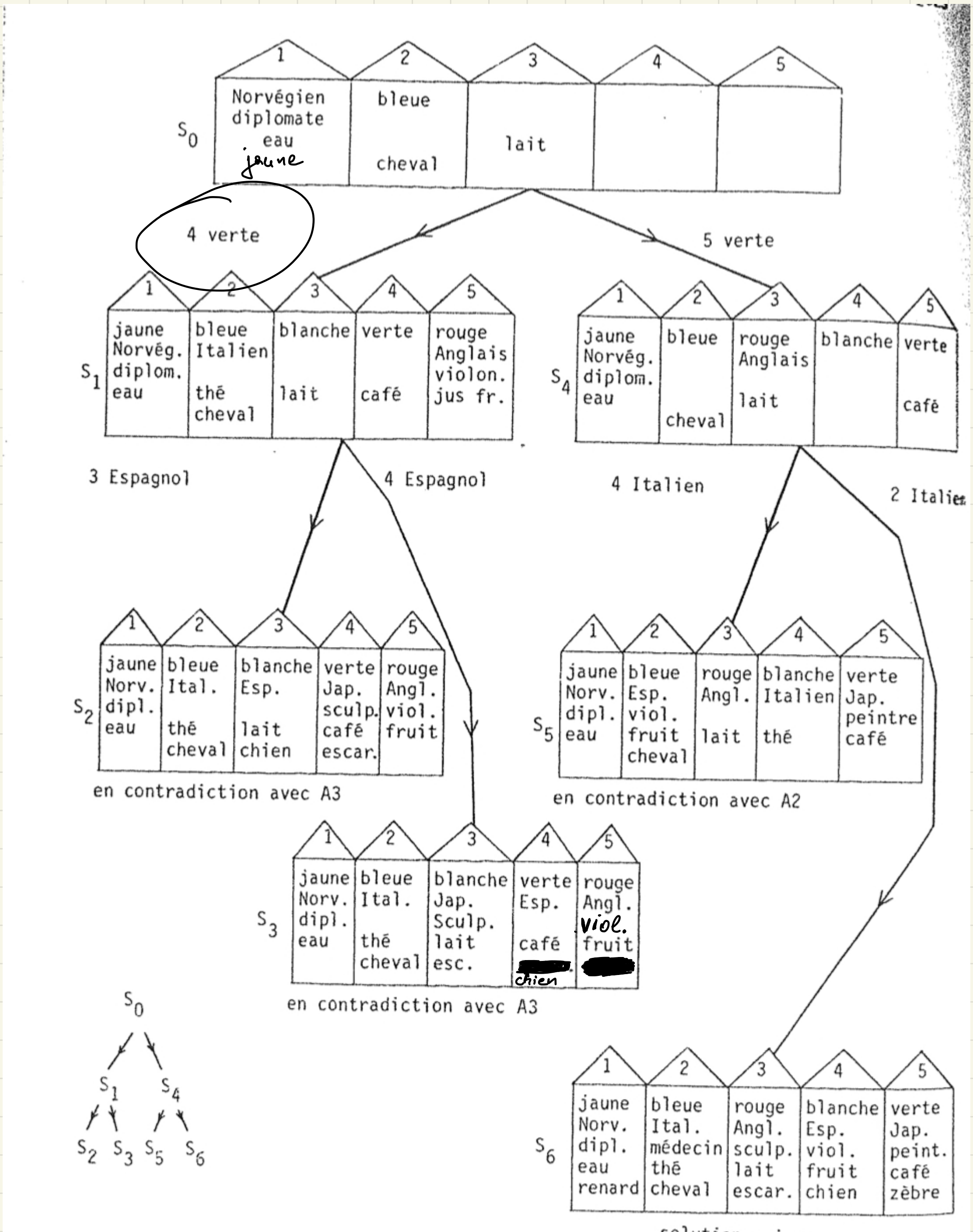
2. Méthodes arborescentes

Une méthode arborescente consiste à résoudre un problème suivant le principe de « divide and conquer ». On résout le problème, en général récursivement, en le décomposant en sous problèmes de même nature, et en faisant évoluer dans le temps une arborescence tel qu’à chaque noeud de l'arborescence est associé un sous-ensemble de solutions réalisables. La racine de l’arborescence contient l’ensemble des solutions réalisables du problème auquel, en appliquant une règle, on le divise dans des souls-ensembles disjoints. L’ensemble des solutions associées aux feuilles de l’arborescence recouvre l’ensemble des solutions du problème.
Dans notre problème, on associe à la racine S0 l’ensemble de toutes les solutions pour lesquelles on déduit le plus de faits certains possible. P.ex. on place successivement les maisons et on rajoute des faits déduits tels que « le norvégien habite la premiere maison à gauche », « le norvégien habite à cote de la maison bleu », « on boit du lait à la maison au milieu », ou d’autres déduits de la combinaison de plusieurs affirmations comme *la premiere maison à gauche ne peut être que jaune* à cause des affirmations 1 et 7. Ensuite, grace à l’affirmation 9 on déduit que le norvégien est le diplomat, et ensuite que la boisson préférée est l’eau (grace à 4, 6 et 12).



Ensuite l’arborescence se construit par hypothèse sur la couleur des maisons. On privilégie les hypotheses à deux possibilités afin de réduire la largeur de l’arborescence. On fait d’abord l’hypothèse sur la maison de couleur verte qui ne peut être que la 4 ou la 5, et ainsi de suite.

Voici l'arborescence construit:



Arborescence des solutions (les sommets sont numérotés dans l'ordre de leur création)

Exercice 3

Résoudre le problème de décodage suivant :

$$\begin{array}{rccccc} & F & O & R & T & Y \\ + & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que F, T et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Corrigé :

$F + 1 = S$; appelons r_1, r_2, r_3 les retenues éventuelles existantes sur les différentes additions :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & r_3 & r_2 & r_1 & \\ F & \emptyset & R & T & Y \\ & & T & E & N \\ & & T & E & N \\ \hline S & I & X & T & Y \end{array}$$

$y + 2N = y + 10r_1$

$r_1 + T + 2E = T + 10r_2$

$r_2 + R + 2T = X + 10r_3$

$r_3 + \phi = I + 10 r_4$

$r_4 + F = S \Rightarrow$

$0 \leq r_1 \leq 1$

$0 \leq r_2 \leq 1$

$0 < r_3 \leq 2$

$r_4 = 1$

$Y + 2N = Y + 10r_1$, $2N = 10r_1$ et $r_1 \in \{0,1\}$ car $N = 0$ ou 5.

$r_1 + T + 2E = T + 10r_2$, donc $r_1 + 2E = 10r_2$;

comme $E < 10$, $2E \leqslant 18$ et $r_1 \leqslant 1$, on déduit $r_2 < 2$.

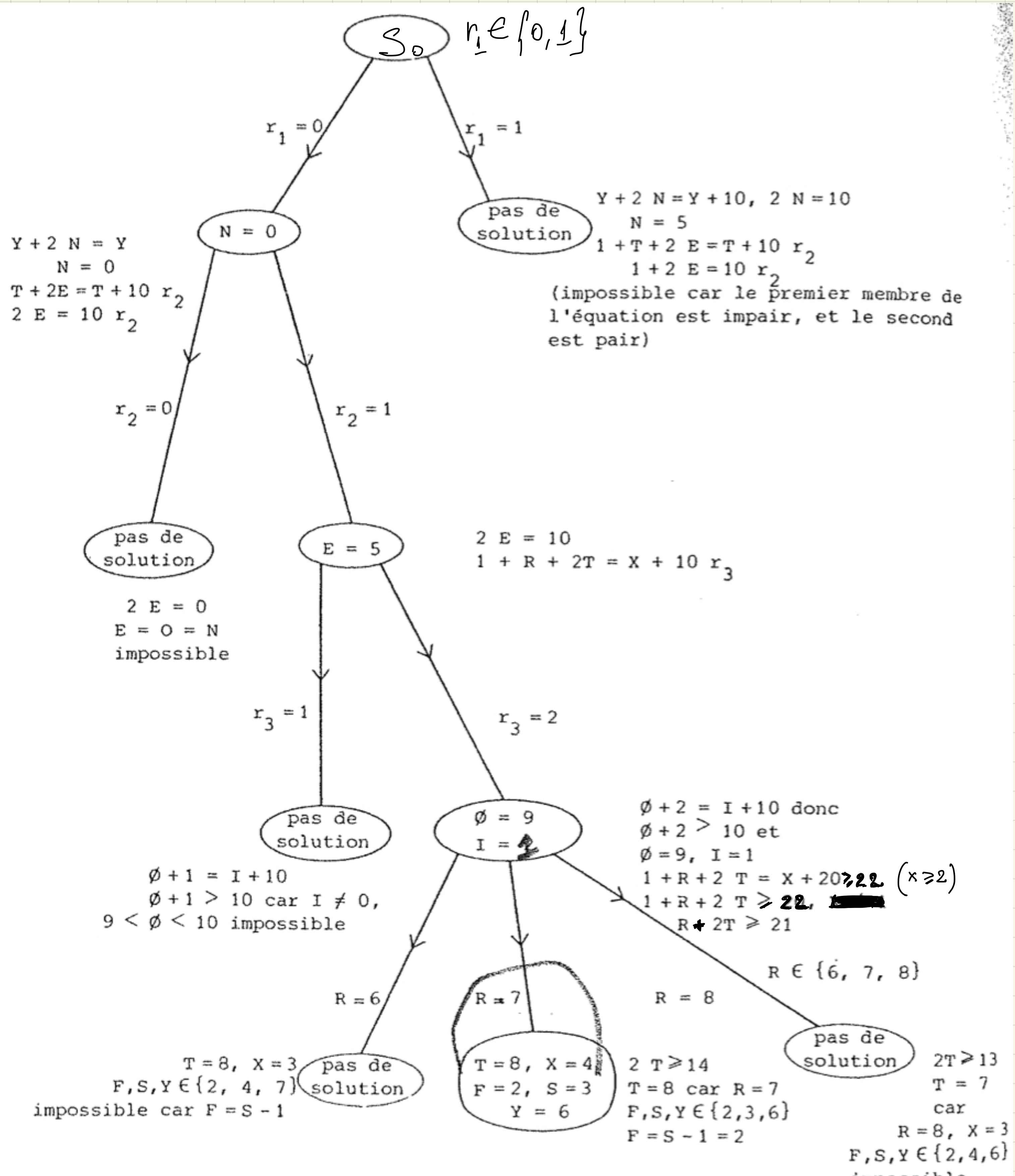
$r_2 + R + 2T = X + 10r_3$

$r_3 + \emptyset = I + 10$, comme $\emptyset \neq I$, $r_3 \neq 0$, $r_3 \in \{1,2\}$.

On peut alors construire la procédure arborescente suivante :

les solutions du problème sont séparées suivant la valeur prise par la retenue. Commençons, par exemple, par la retenue sur la première addition effectuée.

Les implications déduites d'un choix sont portées sur l'arborescence à côté du sommet correspondant aux solutions étudiées ; en cas de blocage (les choix réalisés ne conduisent pas à une solution admissible du problème) on remet en cause le dernier choix effectué (procédure dite par retour arrière ou "backtrack").



Solution unique :

$$\begin{array}{r} 29\ 786 \\ +\quad 850 \\ +\quad 850 \\ \hline 31\ 486 \end{array}$$