

MT94 - Équations différentielles, méthodes numériques

S. Mottelet

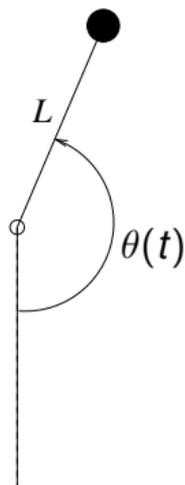
Université de Technologie de Compiègne

Plan

- 1 Motivations
- 2 Rappels
- 3 Schémas numériques
- 4 Références

Motivations

Le pendule

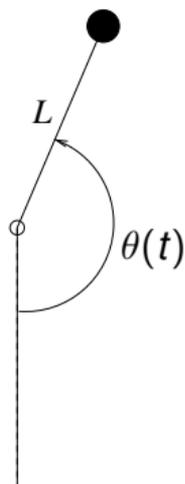


$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) &= -\frac{g}{L} \sin \theta(t), \\ \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{\theta}(0) &= 0. \end{cases}$$

Lu dans un livre de terminale : *cette équation est non-linéaire à cause de $\sin \theta(t)$, et sa résolution est difficile. Cependant, si l'écart angulaire $\theta(t)$ est faible, sa mesure en radians est très peu différente de celle de $\sin \theta(t)$ [...] si on peut se contenter d'une solution approchée, nous pouvons linéariser l'équation en confondant $\theta(t)$ et $\sin \theta(t)$.*

Motivations

Le pendule, version linéarisée



$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) &= -\frac{g}{L}\phi(t), \\ \phi(0) &= \theta_0, \\ \dot{\phi}(0) &= 0. \end{cases}$$

Il est assez élémentaire de montrer que la solution de cette équation différentielle est la fonction

$$\phi(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \omega = \sqrt{g/L}.$$

Quelle est la validité de cette solution ?

Motivations

Le pendule, linéaire vs. non-linéaire, avec Scilab

Pour pouvoir juger raisonnablement le modèle linéarisé, il faut disposer de méthodes permettant d'approcher la solution des équations originales en $\theta(t)$. Ces méthodes portent le nom de **schémas numériques**.

Comparons l'approximation de $\theta(t)$ donnée par Scilab avec $\phi(t)$:

Rappels

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient $T > 0$, un intervalle $E \subset \mathbb{R}$ et $f : [0, T] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche les solutions de l'équation différentielle avec condition initiale (problème de Cauchy)

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y), \quad t \in]0, T], \\y(0) &= y_0,\end{aligned}\tag{C}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème

S'il existe $L > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, T], \forall (y, z) \in E^2, |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|,$$

alors pour tout $y_0 \in E$ le problème de Cauchy (C) admet une solution unique.

Rappels

Théorème de Cauchy-Lipschitz, contre-exemple

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{y}, \quad t > 0, \\y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Ici $E = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y}}{y} = +\infty$ donc il n'existe pas L telle que

$$\forall (y, z) \in E^2, |\sqrt{y} - \sqrt{z}| \leq L|y - z|.$$

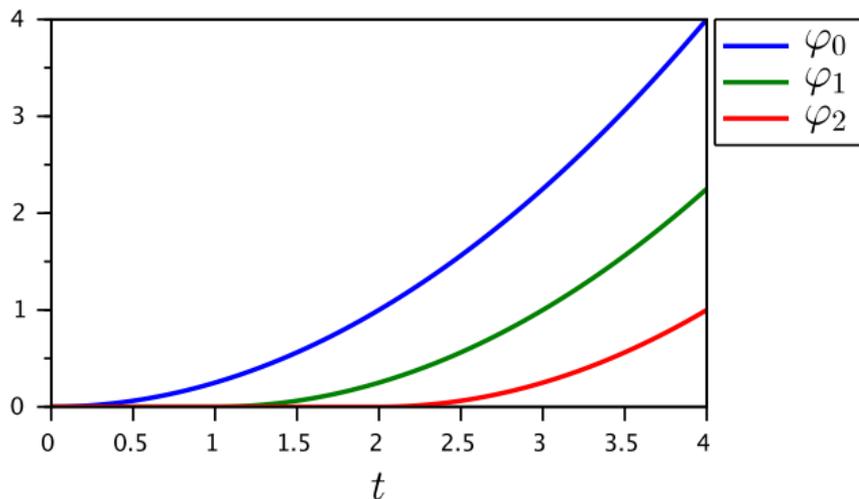
Infinité de solutions pour $C \geq 0$:

$$\varphi_C = \begin{cases} 0, & t < C, \\ \frac{1}{4}(t - C)^2, & t \geq C. \end{cases}$$

Rappels

Théorème de Cauchy-Lipschitz, contre-exemple

$$\varphi_C = \begin{cases} 0, & t < C, \\ \frac{1}{4}(t - C)^2, & t \geq C. \end{cases}$$



Schémas numériques

Principe

On cherche à calculer une approximation de $t \rightarrow y(t)$ solution de

$$\begin{aligned}y' &= f(t,y), \quad t \in]0, T], \\y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

pour des valeurs discrètes de t données par la suite $(t_k)_{k=0\dots N}$, où $t_k = kh$ et $h = T/N$.

Première idée :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Il suffit d'approcher l'intégrale !

Schémas numériques

Le schéma d'Euler (1768)

Si on approche l'intégrale par l'aire du rectangle de hauteur (à gauche) $f(t_k, y(t_k))$, on peut écrire

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx (t_{k+1} - t_k) f(t_k, y(t_k)),$$

et en déduire le

Schéma d'Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k \geq 0.$$

Schémas numériques

Le schéma d'Euler, exemple

On considère l'équation différentielle $y' = \lambda y, t \in]0, T]$, $y(0) = 1$.

Ici $f(t, y) = \lambda y$ et la solution exacte est $y(t) = \exp(\lambda t)$.

Le schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k), \\ &= y_k + h\lambda y_k, \\ &= (1 + \lambda h)y_k, \quad k = \dots, N-1,\end{aligned}$$

d'où

$$y_N = (1 + h\lambda)^N = \left(1 + \frac{T}{N}\lambda\right)^N.$$

On montre facilement que $\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \exp(\lambda T)$

Schémas numériques

Le schéma d'Euler implicite

Si on approche l'intégrale par l'aire du rectangle de hauteur (à droite) $f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$, on peut écrire

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx (t_{k+1} - t_k) f(t_{k+1}, y(t_{k+1})),$$

et en déduire le

Schéma d'Euler **implicite**

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}), \quad k \geq 0.$$

Ce schéma nécessite de résoudre pour tout k une équation dont y_{k+1} est la solution.

Les schémas de ce type sont parfois nécessaires (problèmes « raides »)

Schémas numériques

Le schéma d'Euler implicite, exemple

On considère la même équation différentielle $y' = \lambda y, t \in]0, T]$, $y(0) = 1$.

Le schéma d'Euler implicite s'écrit

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_{k+1}), \\ &= y_k + h\lambda y_{k+1}, \\ &= \frac{y_k}{(1 - \lambda h)}, \quad k = \dots, N - 1,\end{aligned}$$

d'où

$$y_N = \frac{1}{(1 - h\lambda)^N} = \frac{1}{(1 - \frac{T}{N}\lambda)^N}.$$

On montre facilement que $\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \exp(\lambda T)$

Schémas numériques

Le schéma d'Euler-Cauchy

Si on approche l'intégrale par la méthode du trapèze

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2} (f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1})))$$

et que l'on approche $y(t_{k+1})$ par le schéma d'Euler, on obtient le

Schéma d'Euler-Cauchy

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \hat{y}_{k+1})), \quad k \geq 0.$$

Schémas numériques

Le schéma d'Euler Cauchy, exemple

On considère la même équation différentielle $y' = \lambda y, t \in]0, T]$, $y(0) = 1$.

Le schéma d'Euler nous donne

$$\hat{y}_{k+1} = (1 + \lambda h)y_k,$$

et le schéma d'Euler-Cauchy s'écrit donc

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \hat{y}_{k+1})), \\ &= y_k + \frac{h}{2} (\lambda y_k + \lambda(1 + \lambda h)y_k), \\ &= \left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right) y_k.\end{aligned}$$

On montre facilement que $\lim_{N \rightarrow \infty} y_N = \exp(\lambda T)$.

Schémas numériques

Schéma à un pas

Définition

On appelle schéma à un pas la construction de la suite récurrente (y_k) définie par

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k, h), \quad k \geq 0.$$

Exemples de schémas :

- Euler : $\phi(t, y, h) = f(t, y)$,
- Euler-Cauchy : $\phi(t, y, h) = \frac{1}{2} (f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)))$,
- point milieu : $\phi(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t, y))$.

Schémas numériques

Convergence, approche expérimentale

Définition

On dit que le schéma à un pas

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(t_k, y_k, h), \quad k \geq 0,$$

est convergent si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{k=0 \dots N} |y(t_k) - y_k| = 0.$$

Utilisons Scilab pour constater expérimentalement la convergence des schémas d'Euler et d'Euler-Cauchy sur l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} y' &= -ty + t, \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad \implies \quad y(t) = 1 - \exp(-t^2/2)$$

Schémas numériques

Convergence, la théorie : la consistance

La convergence d'un schéma résulte de deux propriétés complémentaires :

Définition (consistance)

Soit $e_k = y(t_{k+1}) - y(t_k) - h\phi(t_k, y(t_k), h)$, on dit que le schéma est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} |e_k| = 0.$$

S'il existe $C_1 > 0$ tel que $|e_k| < C_1 h^{p+1}$ on dit que le schéma est **d'ordre p** .

Le schéma d'Euler est d'ordre 1, le schéma d'Euler-Cauchy est d'ordre 2.

Schémas numériques

Convergence, la théorie : la stabilité

Définition (stabilité)

Soient les deux suites (y_k) et (\tilde{y}_k) définies par y_0, \tilde{y}_0 et pour $k \geq 0$ par

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \phi(t_k, y_k, h), \\ \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{y}_k + \phi(t_k, \tilde{y}_k, h) + \varepsilon_k,\end{aligned}$$

on dit que le schéma est stable s'il existe $S > 0$ tel que

$$\max_{k=0 \dots N} |\tilde{y}_k - y_k| \leq S \left(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k| \right).$$

Le calcul de la constante S fait intervenir la formule du schéma, le temps final T et L la constante de Lipschitz de f .

Si f est Lipschitzienne les schéma d'Euler et d'Euler-Cauchy sont stables.

Schémas numériques

Convergence, la théorie

Théorème

Si le schéma est stable, consistant et d'ordre p , alors il est convergent et il existe C_2 tel que

$$\max_{k=0\dots N} |y_k - y(t_k)| \leq C_2 h^p.$$

Quelques remarques :

- La constante C_2 dépend du schéma, de T et des propriétés de la solution y (donc de f) : **Le choix d'un schéma adapté nécessite des informations qualitatives sur la solution.**
- L'étude de la stabilité d'un schéma met en évidence l'influence de l'accumulation des erreurs d'arrondi : pour atteindre une précision voulue avec un schéma d'ordre insuffisant, **augmenter le nombre de pas N sera toujours un mauvais choix en comparaison du choix d'un schéma d'ordre plus élevé.**

Schémas numériques

En pratique

Dans les logiciels de calcul numérique, les schémas proposés utilisent un pas $t_{k+1} - t_k$ variable, de manière à assurer que l'erreur locale (qu'il est possible d'estimer) reste inférieure à une tolérance donnée.

⇒ fonction **ode()** de Scilab

Dans ce cas des pas intermédiaires sont réalisés entre les instants $(t_k)_{k=0\dots N}$ imposés par l'utilisateur de manière à respecter la tolérance.

En TD nous coderons les schémas d'Euler, d'Euler-Cauchy, du point milieu et un schéma de Runge et Kutta d'ordre 4. Nous retrouverons leur ordre de manière expérimentale et les comparerons avec la fonction **ode()** de Scilab.

Références

E. Hairer, G. Wanner, S. P. Nørsett, *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 8, 1993.

E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14, 1996.

