Correction TD 6 - RO03

Exercice1: On se propose de résoudre le problème de décodage suivant :

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que M et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Exercice 2: Méthode de Little :(extrait de ROSEAUX)

Un représentant de commerce doit se rendre de la ville A où il réside dans quatre autres villes pour visiter les magasins clients de la marque qu'il représente. Il désire passer une et une seule demi-journée chez chacun de ses clients et revenir à sa ville de départ A. La durée du trajet entre deux villes I et J est mesurée en demi-journées et dépend de la circulation routière dans le sens IJ et JI. Le tableau donnant ces durées n'est donc pas symétrique.

$T = (t_{ij}) =$

	A	B	C	D	E
A	∝	2	1	3	4
B	1	∝	6	5	7
C	4	3	∝	8	2
D	5	7	4	∝	1
E	2	3	5	2	∝

Calculer le trajet de durée minimale passant une et une seule fois par chaque ville.

Nous allons introduire une arborescence pour résoudre ce puzzle. Ecrivons les équations en appelant x_1, x_2, x_3, x_4 les retenues des additions. On a nécessairement $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \{0, 1\}$.

$$
\begin{array}{ccccc}
x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \\
 & S & E & N & D \\
 & M & O & R & E \\
\hline
M & O & N & E & Y
\end{array}
$$

$\cancel{N} + R + x_1 = 10 + \cancel{N+1}$

$R + x_1 = 9 \Rightarrow R = 8 \Rightarrow x_1 = 1$

Et donc le système d'équations :

$D + E = 10x_1 + Y$ (1)

$N + R + x_1 = 10x_2 + E$ (2)

$E + \cancel{O} + x_2 = \cancel{10x_3} + N$ (3)

$S + M + x_3 = 10x_4 + O$ (4)

$x_4 = M = 1$ (5)

Une implication directe est M = 1 ; il reste donc 4 équations

$D + E = 10x_1 + Y$ (1)

$N + R + x_1 = 10x_2 + E$ (2)

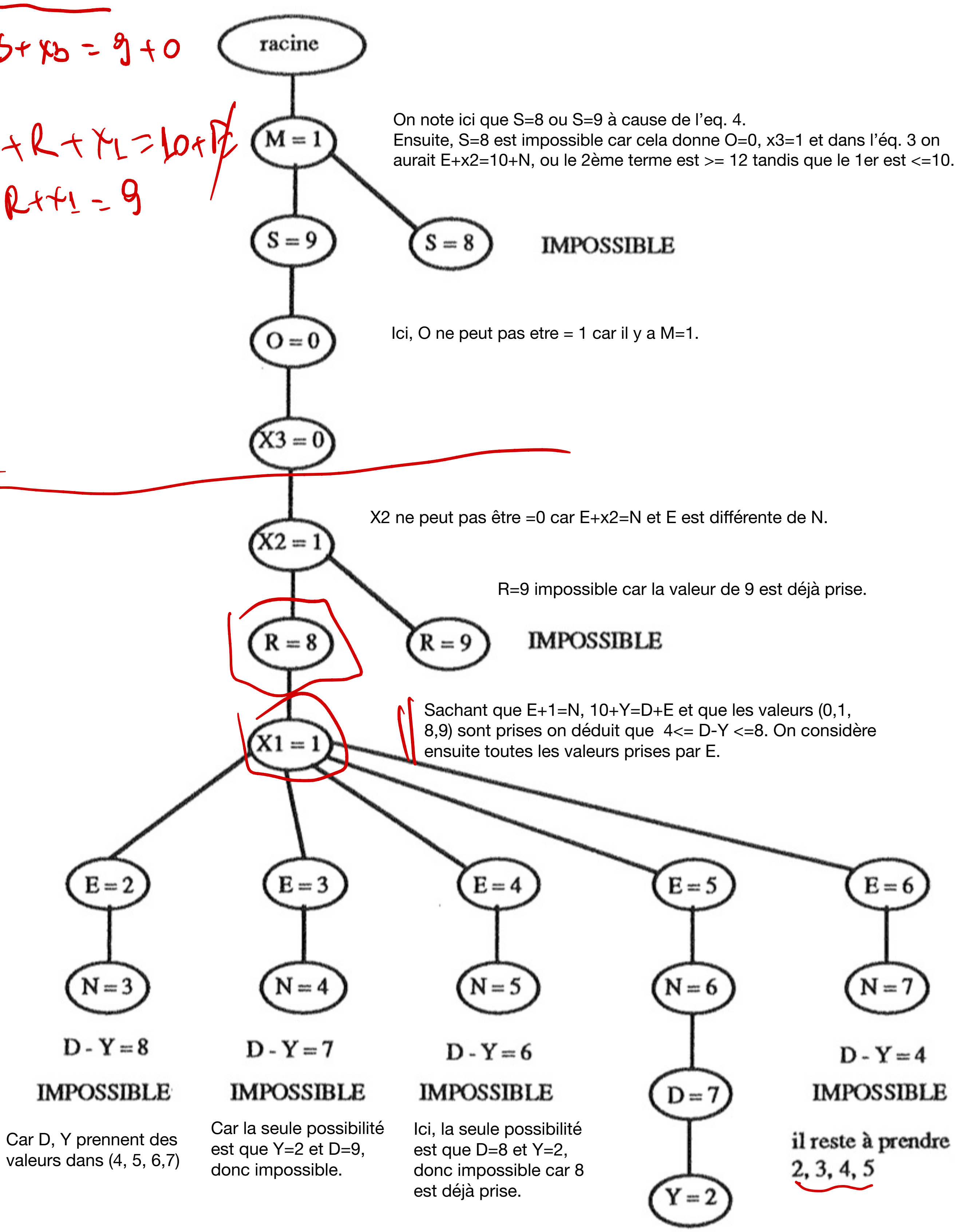
$E + O + x_2 = 10x_3 + N$ (3)

$S + x_3 = 9 + O$ (4)

$S + x_3 = 9 + O$

$\cancel{E+1} + R + x_1 = 10 + \cancel{E}$

$R + x_1 = 9$



exercice 2 :

La valeur d'un circuit hamiltonien est : $z = \sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} t_{ij}\, x_{ij}$ avec $x_{ij} = 1$ si on passe du noeud i au noeud j et 0 sinon. t_{ij} est la valeur de l'arc dans la matrice d'adjacence.

Posons $T^0 = (t_{ij})^0 \Rightarrow t_{ij} - a_i - b_j = t_{ij}^0$ avec $a_i = \min t_{ij}$ pour j et $b_j = \min (t_{ij} - a_i)$ pour i.

Donc $z = \sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} (a_i + b_j + t_{ij}^0)\, x_{ij} = \sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} t_{ij}^0\, x_{ij} + \sum_{i=A}^{E} \sum_{i=A}^{E} a_i\, x_{ij} + \sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} b_j\, x_{ij}$

Or $\sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} a_i\, x_{ij} = \sum_{i=A}^{E} a_i \underbrace{\left(\sum_{j=A}^{E} x_{ij}\right)}_{=1} = \sum_{i=A}^{E} a_i$ et $\sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} b_j\, x_{ij} = \sum_{j=A}^{E} \sum_{i=A}^{E} b_j\, x_{ij} = \sum_{j=A}^{E} b_j \left(\sum_{i=A}^{E} x_{ij}\right) = \sum_{j=A}^{E} b_j$

Or c'est un circuit donc on ne repasse pas 2 fois au même sommet donc $\sum_{i=A}^{E} x_{ij} = \sum_{j=A}^{E} x_{ij} = 1$

$\Rightarrow \underset{(*)}{z} = \underbrace{\sum_{i=A}^{E} \sum_{j=A}^{E} t_{ij}^0\, x_{ij}}_{z_0(x) \geq 0} + \underbrace{\sum_{i=A}^{E} a_i + \sum_{j=A}^{E} b_j}_{\text{Const.}} \Rightarrow z \geq \sum_{i=A}^{E} a_i + \sum_{j=A}^{E} b_j$ ce qui correspond à une borne inférieure dans notre cas 8 (Cf. ci-dessous). <u>**A noter que tous les éléments de la matrice T0 sont >=0.**</u>

Dans un premier temps on fait donc apparaître les zéros :

	A	B	C	D	E	min
A	∞	2	1	3	4	1
B	1	∞	6	5	7	1
C	4	3	∞	8	2	2
D	5	6	4	∞	1	1
E	2	3	5	2	∞	2
						7

$\Rightarrow$

	A	B	C	D	E	
A	∞	~~1~~ 0	0	2	3	
B	0	∞	5	4	6	
C	2	~~1~~	∞	6	0	
D	4	~~6~~ 5	3	∞	0	
E	0	~~1~~ 0	3	0	∞	
	0	1	0	0	0	1

NOTE: Toute solution utilisant que les arcs de valuations nulles est forcément une solution optimale.

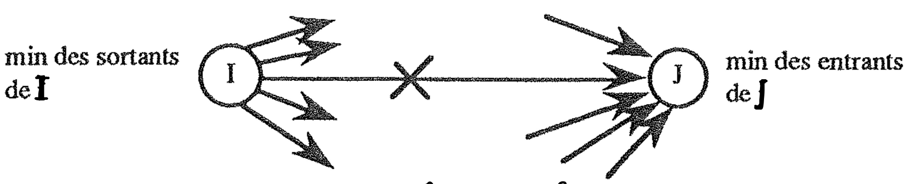
On a donc le noeud de départ S0 qui représente toutes les solutions. On fait apparaître les regrets, et l'on sépare sur le regret maximum ce qui a pour but de limiter autant que faire ce peut les retours arrière.

Notion de regrêt :

Cherchons le regrêt de chaque arc de valeur nulle (on a intérêt à les emprunter car ils ne grèvent pas la valeur de l'évaluation de départ du circuit). Par exemple le fait de ne pas emprunter l'arc (B,A) entrainerait le choix d'un arc de valeur au moins égale à 4 (minimum de B vers un autre noeud) pour se rendre de B à une autre ville et d'un arc de valeur au moins égale à 0 pour se rendre d'une autre ville à A (minimum de toute autre ville vers A) puisque tout circuit hamiltonien emprunte un arc incident extérieurement à B et un autre arcs incident intérieurement à A.

Une évaluation minimale du surcoût engendré par le fait de ne pas choisir d'emprunter l'arc (B,A) est donc donné par le calcul :

regrêt de (B,A) : $\min\{t_{Bj}^0\} + \min\{t_{iA}^0\}$ pour $i \neq B$ et $j \neq A$.



Regret (I,J)=min $\{t^0(I,k)\}_{k \neq J}$ + min $\{t^0(k,J)\}_{k \neq I}$

On calcule donc le regret pour chaque arc de valuation nulle.

La procédure de séparation choisie est que l'on sépare l'arborescence sur le choix d el'arc ayant le plus grand regrêt. En effet, on limite autant que faire ce peut les retour arrière en prenant l'arc dont le choix contraire entraînerait la plus grande augmentation du circuit hamiltonien.

En cours de développement del'arborescence on sera parfois amené à ré-évaluer ces valeurs de circuit pasr défaut qui rapellons-le ne sont que des estimation par défaut des circuit hamiltonien que l'on devrait obtenir en développant le noeud ainsi valué.

On sépare donc sur l'arc (B,A) qui donne une évaluation par défaut du circuit hamiltonien de 12 (8+4). Ceci nous donne les sommets S1 et S2 (Cf. développement de l'arborescence). Puis on continue de séparer sur S1 ; en ayant préalablement éliminé le circuit parasite (l'arc (A,B) prend la valeur ∞).

S0	A	B	C	D	E
A	∞	0^{0+0}	0^3	2	3
B	0^4	∞	5	4	6
C	2	0^0	∞	6	0^0
D	4	5	3	∞	0^3
E	0^0	0^0	3	0^2	∞

S1	B	C	D	E
A	∞	0^5	2	3
C	0^0	∞	6	0^0
D	5	3	∞	0^3
E	0^0	3	0^2	∞

La borne associée à S1 est à nouveau calculée par les minimums des lignes et colonnes de la matrice. Dans ce cas, ces minimums sont nuls, donc la borne est 8+0.

A partir de S1 on fait apparaître les regrets, (A,C) a le regret maximal. Ce qui nous donne S3 en éliminant les circuit parasite (C,B) = ∞ et (C,A) = ∞ car on a le circuit [B,A,C] en cours de construction ; et S4 avec une évaluation par défaut de la borne de 13.

S3	B	D	E
C	∞	6	0^6
D	5	∞	0^5
E	0^5	0^6	∞

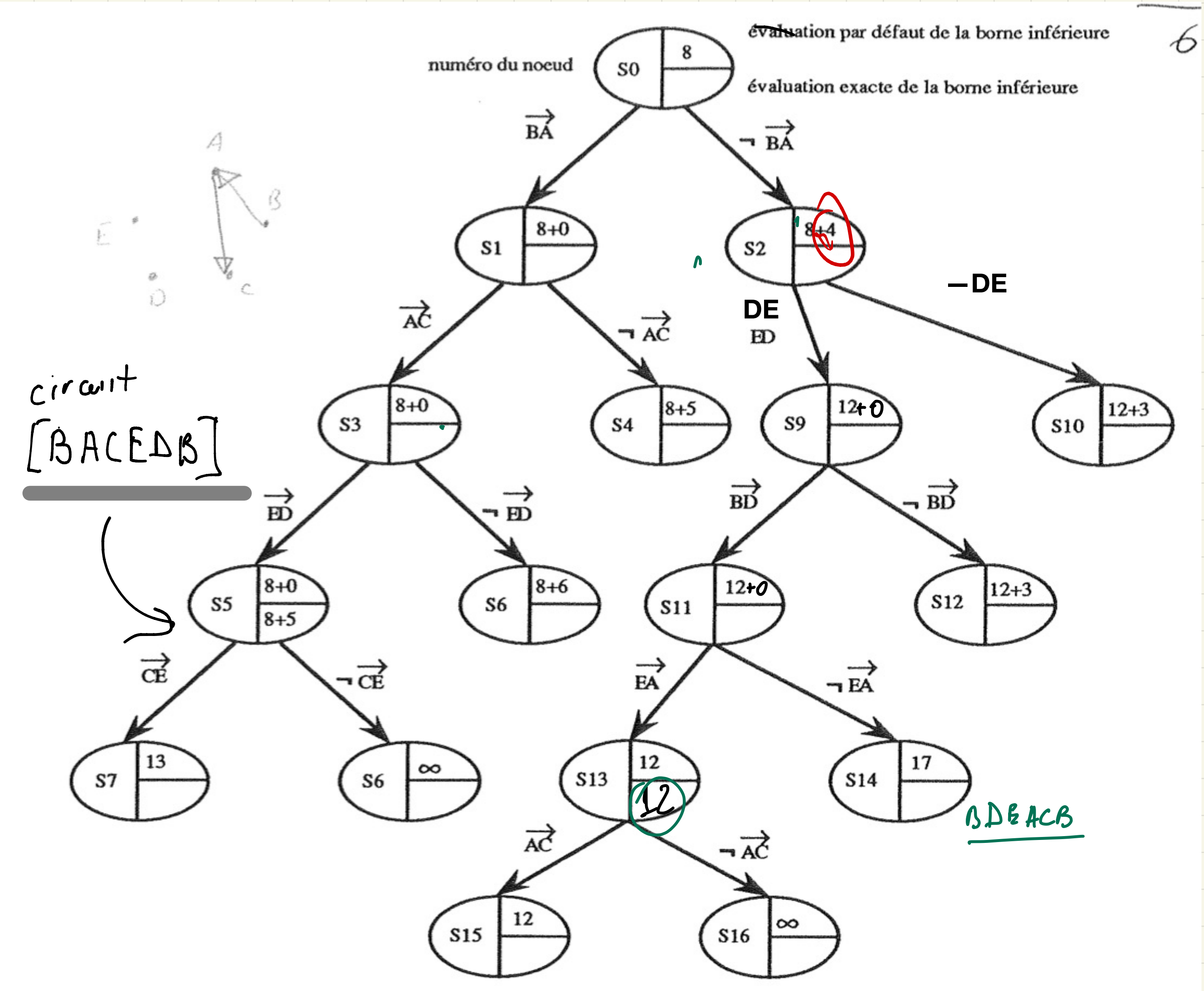
S5	B	E
C	∞	0
D	5	∞
min	5	

S5	B	E
C	∞	$0^∞$
D	$0^∞$	∞

Depuis S3 on a le choix pour séparer entre (C,E) et (E,D), on choisira (E,D) pour raison pédagogique car cela fait ré-évaluer la borne. On sépare sur (E,D), ce qui donne S6 avec une évaluation par défaut de 14 ; et S5 pour le quel on élimine le circuit parasite (D,E) = ∞. On a alors en construction pour S5 le circuit [B,A,C] [E,D] ; mais il n'y a plus un zéro par ligne et par colonne. Il faut donc faire apparaître des zéros. Cela signifie donc qu'au niveau de ce noeud le ciruit hamiltonien si il existe à une valeur suprérieure à l'évaluation par défaut qui a été faite à l'aide des regrets qui ont permis d'atteindre ce noeud ; on ré-évalue donc la valeur et on la stocke au niveau du noeud.

On sépare ensuite sur (C,E). On obtient un sommet S7, de valeur 13, avec un circuit en cours de construction qui est [B,A,C,E,D] ; et un sommet S8 de valeur ∞ ce qui signifie qu'il est impossible de constituer un circuit hamiltonien.

Depuis S7 il ne reste que (D,B) à choisir ce qui donne le circuit hamiltonien [B,A,C,E,D,B] qui est de valeur 13. Donc il faut reprendre l'évaluation du sommet S2 qui a une meilleure valeur par défaut (12).



On repart donc de S2, on élimine le circuit parasite (B,A) = ∞, puis on fait apparaître les zéros (ce qui augmente le coût de la solution finale), en comptant le regret de ne pas prendre (B,A).

S2	A	B	C	D	E	min
A	∞	0^{0+0}	0^3	2	3	
B	∞	∞	5	4	6	(4)
C	2	0^0	∞	6	0^3	
D	4	5	3	∞	0^3	
E	0^0	0^0	3	0^2	∞	

S2	A	B	C	D	E
A	∞	0^0	0^1	2	3
B	∞	∞	1	0^1	2
C	2	0^0	∞	6	0^0
D	4	5	3	∞	0^3
E	0^2	0^0	3	0^0	∞

Puis on choisit (D,E) et on élimine le circuit parasite (E,D) = ∞, ce qui correspond au noeud 9. Le noeud 10 correspond au fait de ne pas choisir (D,E) ce qui donne un regret de 15.

BDEA

B→D→E

S9	A	B	C	D
A	∞	0^0	0^1	2
B	∞	∞	1	0^3
C	2	0^2	∞	6
E	0^2	∞	3	∞

S11	A	B	C
A	∞	∞	0^3
C	2	0^2	∞
E	0^5	∞	3

S13	B	C
A	∞	[illegible]
C	0^∞	∞

Le regret maximum est alors (B,D), on choisit donc cet arc et on élimine les cicruits parasites (D,B) = ∞ et (E,B) = ∞. Ceci donne le circuit en cours [B,D,E] et une évaluation de 12 pour le noeud S11 et une évaluation de 15 pour le noeud S12.

On développe S11 en S13 et S14. Ce qui correspond au choix de (E,A) avec des évaluations de 12 et 17 respectivement. Pour S13 le circuit en construction est [B,D,E,A]. **On interdit l'arc AB.**

Enfin, on développe S13 en séparant sur le choix de (A,C), ce qui donne d'une part S15 d'évaluation 12 et S16 d'évaluation ∞ donc c'est impossible. Il reste à choisir (C,B) ce qui donne le circuit hamiltonien [A,C,B,D,E,A] de valeur 12. Aucune évaluation par défaut des sommets non développé ne donnant de meilleure borne on a donc atteint l'optimum.