TD Problèmes de moindres carrés non-linéaires

Approximation d'une Gaussienne avec le log trick

Ici le log trick consiste à essayer de minimiser (on a noté $\log$ le logarithme naturel)

$$E_{\log}(a, \mu, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} (\log f(t_i) - \log y_i)^2,$$

et comme ici $f(t) = a \exp\left(-(t-\mu)^2/\sigma^2\right)$,

$$\begin{aligned} \log f(t) &= \log a - (t-\mu)^2/\sigma^2 = \log a - \mu^2/\sigma^2 + 2t\mu/\sigma^2 - t^2/\sigma^2, \\ &= \left(1,\ 2t,\ -t^2\right) \mathbf{x}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{x} = \left(\log a - \mu^2/\sigma^2,\ \mu/\sigma^2,\ 1/\sigma^2\right)^\top$, on a donc $E_{\log}(a, \mu, \sigma) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, où la ligne numéro i de $\mathbf{A}$ est donnée par $\mathbf{A}_i = (1,\ 2t_i,\ -t_i^2)$, les composantes de $\mathbf{b}$ sont définies comme $b_i = \log y_i$.

Une fois déterminé le vecteur $\mathbf{x}$ minimisant $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2$ (en une ligne de Scilab !), il suffit de poser

$$\begin{aligned} \log a - \mu^2/\sigma^2 &= x_1, \\ \mu/\sigma^2 &= x_2, \\ 1/\sigma^2 &= x_3, \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\sigma = 1/\sqrt{x_3},\ \mu = x_2/x_3,\ a = \exp(x_2^2/x_3 + x_1).$$