MT94/P23/TD - Valeurs propres - Résonance dans les systèmes mécaniques discrets

On s'intéresse aux systèmes gouvernés par des équations différentielles linéaires pour étudier le phénomène de résonance. Nous allons commencer par le système le plus simple que l'on puisse imaginer : un système masse + ressort.

1 Préliminaires

Normalement le contenu de cette section a été vu en cours. Si c'est effectivement le cas vous pouvez passer directement à la section "Travail à réaliser".

1.1 Un système masse + ressort

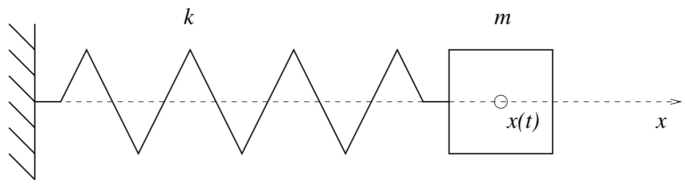

FIGURE 1 – Un système ressort + masse

Considérons donc un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée et dont l'autre, portant une masse m pouvant glisser sans frottement sur un axe, (voir la figure 1). On se donne la possibilité d'agir sur cette masse à l'aide d'une force F. On choisit de prendre comme état la position $u(t)$ de l'extrémité du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Dans ces conditions, les équations de la dynamique permettent d'écrire facilement que l'on a

$$u'' + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}f, \tag{1}$$

et on prendra les conditions initiales

$$u(0) = u'(0) = 0.$$

On va se restreindre à des entrées sinusoïdales

$$f(t) = \sin \omega t,$$

et on peut se demander quelle est l'influence de ω sur le comportement à l'infini de la solution de (1).

On apprend en terminale que si ω n'est pas égal à

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}},$$

alors la solution est égale à

$$u(t) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin \omega_0 t\right).$$

On peut voir que dans ce cas l'amplitude de la solution reste constante. Par contre il est clair que cette expression n'est pas valable quand $\omega = \omega_0$. A cette fréquence la solution change de nature car il se produit un phénomène appelé *résonance*. On peut montrer que dans ce cas la solution s'écrit

$$u(t) = \frac{1}{2\omega m}\left(-t\cos \omega t + \frac{1}{\omega}\sin \omega t\right),$$

et qu'elle n'est pas bornée pour $t > 0$. Il est intéressant de voir que l'on peut faire apparaitre le phénomène en prenant n'importe quelle force $f(t)$ d'amplitude périodique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas, il est difficile d'obtenir des solutions analytiques comme celles que l'on a obtenues dans le cas de forces sinusoïdales. Il faut donc, pour effectuer la simulation, faire appel à une méthode d'approximation adaptée (mais ce n'est pas le sujet qui nous intéresse ici).

1.2 Un système 2 masses + 2 ressorts

On peut se demander ce qu'il advient du phénomène de résonance lorsqu'il y a deux *degrés de liberté* dans le système, c'est à dire deux corps dont les mouvements individuels ne sont pas identiques, mais qui peuvent éventuellement agir l'un sur l'autre. Pour étudier ce problème on reprend le système masse + ressort, auquel on connecte un autre couple masse + ressort avec une raideur et une masse différentes (voir la figure 2), et on fait agir la force $\overrightarrow{F}(t)$ sur la deuxième masse. On peut montrer que les équations régissant les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des masses sont les suivantes :

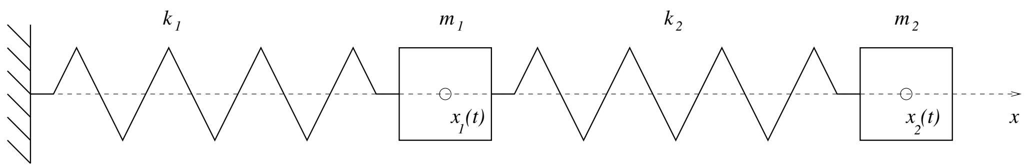

FIGURE 2 – Système mécanique à deux degrés de liberté

$$\begin{cases} m_1 u_1'' &= -(k_1+k_2)u_1 + k_2 u_2, \\ m_2 u_2'' &= k_2 u_1 - k_2 u_2 + f(t), \end{cases} \tag{2}$$

où on a posé $u_1 = x_1 - L_1$ et $u_2 = x_2 - L_1 - L_2$, L_1 et L_2 étant respectivement les longueurs au repos des ressorts 1 et 2. Si nous posons

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

on peut alors récrire matriciellement ces deux équations sous la forme

$$\mathbf{u}'' + \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} f(t), \tag{3}$$

où on a posé

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1+k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Pour l'instant il paraît difficile de connaître les éventuelles fréquences de résonance du système à partir de l'équation précédente, puisque la seule analyse que nous savons faire concerne un oscillateur à un degré de liberté, dont la pulsation propre apparaît directement dans l'équation.

Il suffit en fait de pouvoir diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$. En effet, si on est capable de trouver une matrice $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$ (on peut montrer que ces valeurs sont positives), il suffit de poser le changement de variable

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{v},$$

et dans ce cas l'équation (3) se récrit

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{c}f(t),$$

où

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}$$

soit le système différentiel

$$\begin{cases} v_1'' + \lambda_1 v_1 &=& c_1 f(t), \\ v_2'' + \lambda_2 v_2 &=& c_2 f(t). \end{cases} \tag{4}$$

Il est clair que les deux équations du système (4) sont découplées, et donc qu'elles peuvent être considérées indépendamment l'une de l'autre (ce qui n'était pas possible avant le changement de variable). Si l'on admet que λ_1 et λ_2 sont positives, alors il est clair, en comparant (4) avec (1), qu'il existe deux pulsations propres ω_1 et ω_2 données par

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}.$$

On pourrait en fait aisément déterminer ces valeurs propres à la main puisqu'ici la matrice est 2×2, mais il faut imaginer que la même technique de diagonalisation peut s'appliquer sur des systèmes beaucoup plus complexes, avec un nombre élevé de degrés de liberté. C'est pourquoi il faut pouvoir disposer de méthodes pour approcher les valeurs propres d'une matrice quelconque. Il existe divers algorithmes pour cela, et SCILAB dispose en standard d'une fonction nommée `spec` (pour *spectre*, ensemble des valeurs propres).

2 Travail à réaliser

On cherche à illustrer le phénomène de résonance avec le système à deux degrés de liberté vu précédemment. L'idée est de déterminer a priori les deux fréquences de résonance et de simuler le système (3) avec la macro `ode`. Une fonction d'animation `anime_os` permettant de visualiser les mouvements du système vous sera fournie.

2.1 Détermination des valeurs propres

1. On prend $k_1 = 5, k_2 = 10, m_1 = m_2 = 0.1$. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et on suppose que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. A l'aide la méthode de la puissance, déterminer λ_1 et $\mathbf{y}_1$ vecteur propre associé.
2. A l'aide de la méthode de la puissance inverse, déterminer λ_2 et $\mathbf{y}_2$, vecteur propre associé.
3. Vérifier vos résultats avec la macro `spec` de SCILAB.

2.2 Simulation

1. Simuler le système (3) pour $t \in [0, 10]$ avec la macro `ode` (prenez un pas de temps $h = 0.05$) pour $f(t) = \sin(\omega_1 t)$ puis $f(t) = \sin(\omega_2 t)$. Que constatez-vous ? Visualisez l'animation avec la macro `anime_os`.
2. Simulez le système pour $f(t)$ défini par

$$\begin{cases} f(t) &=& 1,\ t \in [0, T_i/2[, \\ f(t) &=& 0,\ t \in [T_i/2, T_i[, \end{cases}$$

et $f(t + kT_i) = f(t),\ k \in \mathbb{N}$, avec $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$, $i = 1, 2$. Que constatez-vous ?