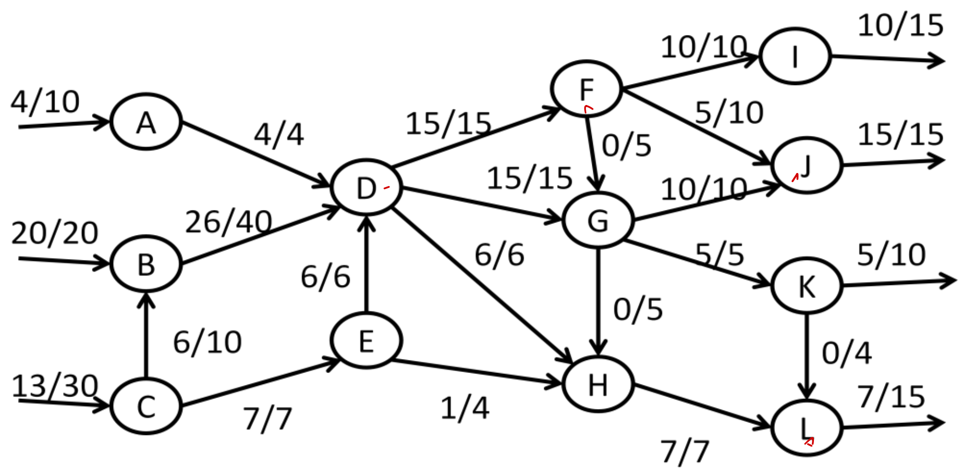
Correction TD 12

PROBLEME DE CIRCULATION URBAINE :

Le réseau routier que doit entretenir la ville de Fulkerson City est schématisé ci-dessous (la notation f_{ij}/C_{ij} donné un flot initial (f_{ij}) et le débit maximal en voitures par heure (C_{ij})).



1) Soit N le nombre maximum de voitures pouvant circuler par heure à travers ce réseau.

1.1) Calculer N. On partira du flot donné ci-dessus. Est-il complet ? Justifier votre réponse. Puis on appliquera l'algorithme de Ford Fulkerson.

1.2) Caractériser les voies que l'on peut créer de façon à augmenter N. De combien peut-on augmenter N ?

2) Les édiles locaux souhaitent améliorer la circulation en augmentant le nombre N grâce à la création de nouvelles voies. Dans la zone urbaine, seuls sont matériellement possibles la création d'une voie HK et l'élargissement de la rue EG jusqu'alors réservée aux piétons. Le choix devra donc se faire entre :

a) créer HK;

b) élargir EG;

c) créer HK et élargir EG.

2.1) Si la politique a) est choisie, quelle capacité maximum doit-on prévoir pour la voie HK ? Dans ce cas, de combien augmente N ?

2.2) Si la politique b) est choisie, quelle autre voie est-on amené à créer si l'on veut augmenter N ?

2.3) Evaluer N dans le cas c).

2) PROBLEME : SECOND PLUS COURT:

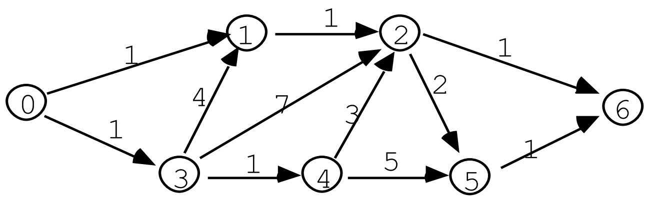
Le but de ce problème est de déterminer un second plus court chemin entre les sommets 0 et n-1 d'un graphe G=(X,U,v) positivement valué et sans circuit. Soit $\gamma(0,n\text{-}1)$ un plus court chemin de 0 à n-1. Un second plus court chemin de 0 à n-1 est un chemin de valeur minimale parmi l'ensemble des chemins de 0 à n-1 qui diffèrent de $\gamma(0,n\text{-}1)$ par au moins un arc. Un tel chemin existe s'il y a , au moins , deux chemins de 0 à n-1 dans G , ce que nous supposerons dans la suite.

On se propose de montrer que **second**, fourni par l'algorithme suivant, définit un second plus court chemin de 0 à n-1.

Algorithme second plus court :
début
1) Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour obtenir l'arborescence A des plus courts chemins allant de 0 à i et les potentiels $\lambda(i)$ de 0 à i pour tous les sommets i de G.
   (N.B.: On notera $\gamma(r,s)$ le chemin , s'il existe , de r à s dans A)
2) Déterminer $\gamma(0,n-1)=(y_0=0,y_1,\ldots,y_p=n-1)$.
3) Poser valeur:=$+\infty$;
   Pour j:=1 jusqu'a p faire
      pour tout k $\in$ ($U^-(y_j)$ - $\{y_{j-1}\}$) faire
      début
         α := $\lambda(k) + v(k,y_j) + (\lambda(n-1) - \lambda(y_j))$;
         si α<valeur alors
         début
            valeur := α ; $pivot_1$:= k ; $pivot_2$:= y_j ;
         fin;
      fin;
4) **Second** := $\gamma(0,pivot_1) + (pivot_1,pivot_2) + \gamma(pivot_2,n-1)$.
fin.

QUESTIONS :

1) Appliquer l'algorithme au graphe G suivant :



N.B. : On rapportera successivement:
- le tableau de Dijkstra présenté en cours;
- l'arborescence A;
- le chemin $\gamma(0,n-1)$;
- les différentes valeurs de α;
- **second.**

Vérifier que **second** est bien un second plus court chemin dans G.

2) Etude de la complexité en fonction de n et m:

On suppose que le graphe est codé par la file des successeurs et des prédécesseurs.

2.1) Quelles sont les complexités des phases 1, 2, 3 et 4 de l'algorithme ?

En déduire la complexité totale.

2.2) Quelle amélioration peut-on proposer pour diminuer cette complexité ?

3) Preuve de l'algorithme :

On note **premier** = $\gamma(0,n-1) = (y_0=0, y_1, \ldots, y_p=n-1)$ le plus court chemin obtenu dans la phase 1) de l'algorithme et **deuxième** = $(z_0=0, z_1, \ldots, z_q=n-1)$ un second plus court chemin de 0 à n-1.

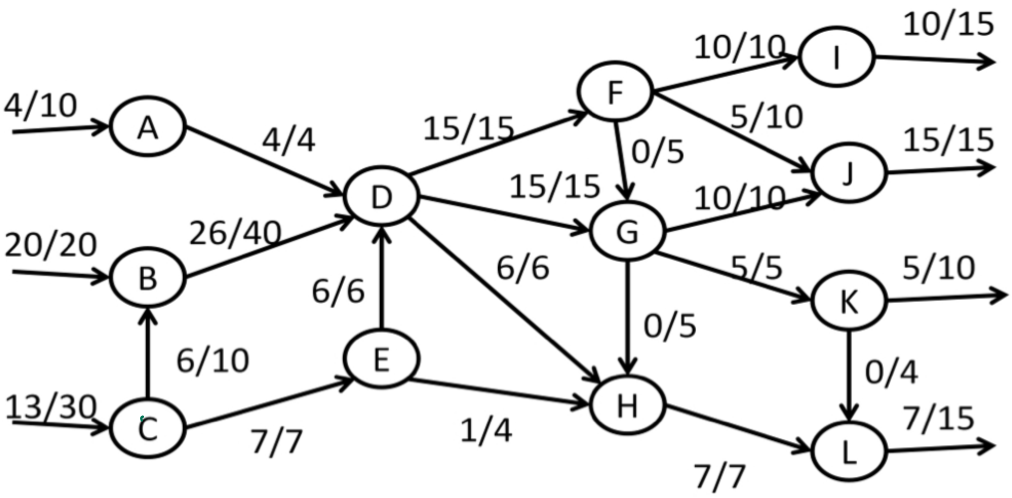
3.1) Montrer qu'il existe un entier r tel que $y_p=z_q$, $y_{p-1}=z_{q-1}$,..., $y_{p-r}=z_{q-r}$ et $y_{p-r-1} \neq z_{q-r-1}$.

3.2) Quelle est la propriété remarquable du chemin $(z_0=0, z_1, \ldots, z_{q-r-1})$?

3.3) En déduire la validité de l'algorithme.

PROBLEME DE CIRCULATION URBAINE :

Le réseau routier que doit entretenir la ville de Fulkerson City est schématisé ci-dessous (la notation f_{ij}/C_{ij} donné un flot initial (f_{ij}) et le débit maximal en voitures par heure (C_{ij})).



1) Soit N le nombre maximum de voitures pouvant circuler par heure à travers ce réseau.

1.1) Calculer N. On partira du flot donné ci-dessus. Est-il complet ? Justifier votre réponse. Puis on appliquera l'algorithme de Ford Fulkerson.

1.2) Caractériser les voies que l'on peut créer de façon à augmenter N. De combien peut-on augmenter N ?

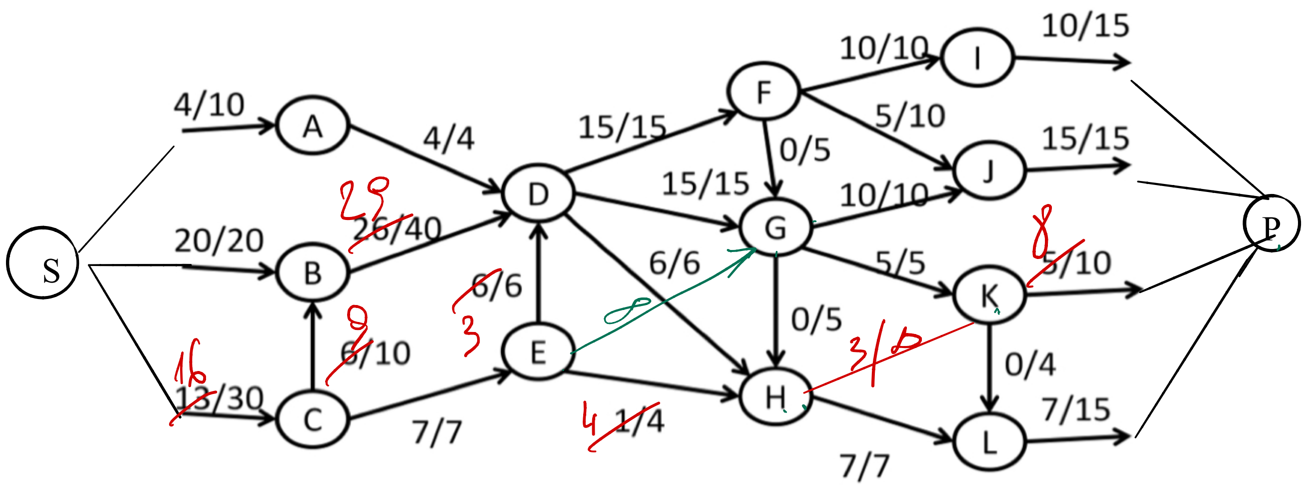
Réponse 1.1. : Le flot donné est complet. En appliquant l'algorithme de Ford Fulkerson on remarque que le flot est aussi maximal.

Réponse 1.2. : Les noeuds marqués à l'arrêt de Ford Fulkerson constitue une coupe minimale. Cette coupe est : (S, A, B, C, D, E, H). Toute arc reliant un sommet de la coupe avec un sommet en dehors de la coupe est susceptible d'améliorer la coupe et ainsi augmenter le flot maximal. De tels arcs sont (EG), (HK), (EK), (DJ) etc. La valeur maximale du flot pouvant etre obtenue est le min des coupes sortant de S et celle rentrant dans P, donc le min (60, 55)=55.

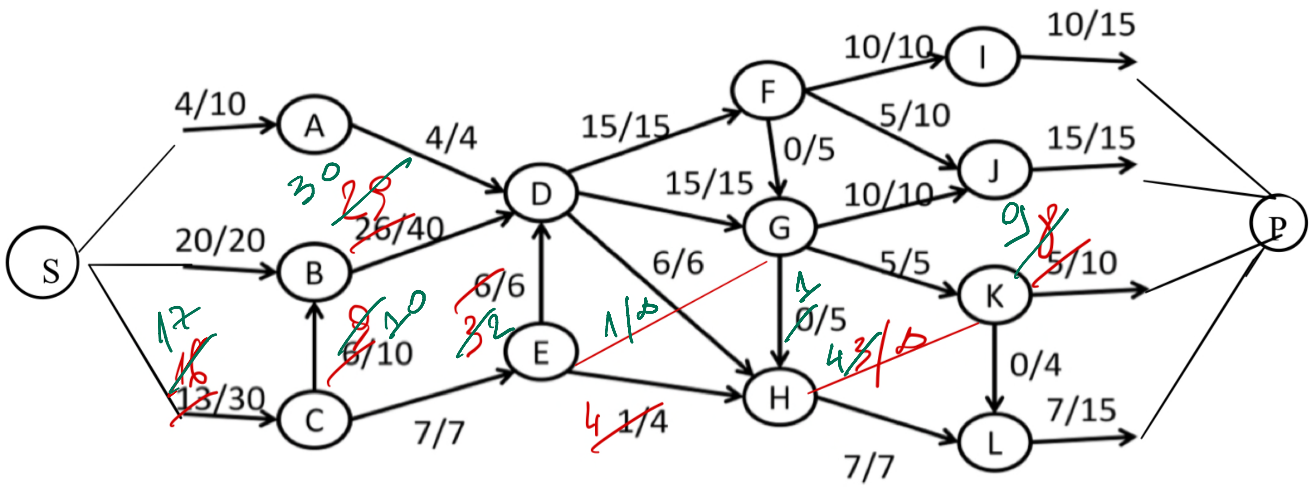
Question 2)

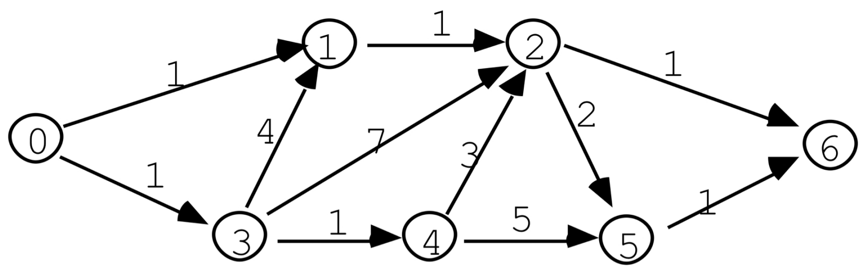
Si on considère le cas b) d'abord on modifie le réseau en rajoutant l'arc (E,G) (arc en vert). On applique l'algorithme de FF est on trouve une autre coupe (S, A, B, C, D, E, H, G) de même capacité que la coupe précédente. Il est donc impossible d'améliorer le flot en appliquant la politique b).

Si on considère la politique a), on rajoute l'arc (H,K) dans le réseau (dans ce cas on ne considère pas l'arc vert EG). On applique ensuite l'algorithme de FF on obtient la chaîne améliorante suivante (S->C->B->D<-E->H->K->P) de capacité 3 (voir la figure ci-dessous).

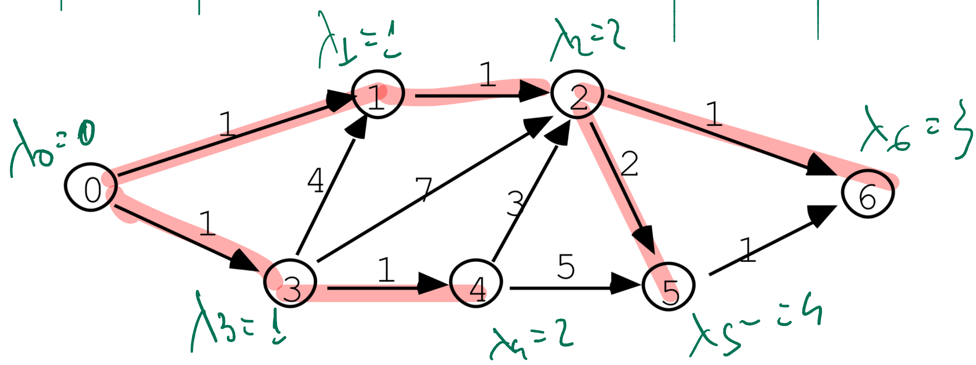


Si on considère la stratégie c) on obtiendra un chemin améliorant S->C->B->D<-E->G->H->K->P de valeur de flot 1. Une fois appliqué sur le réseau donne le flot (modifie en vert) comme indiqué dans la figure ci-dessous. Le flot obtenu est maximal et la coupe minimale est donnée par (S, A, C) de capacité = 4+20+10+7= 41.





	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$\{0\}$	0	1	∞	1	∞	∞	∞
$\{0,1\}$	0	1	2	1	∞	∞	∞
$\{0,1,3\}$	0	1	2	1	2	∞	∞
$\{0,1,2,3\}$	0	1	2	1	2	4	3
$\{0,1,2,3,4\}$	0	1	2	1	2	4	3
$\{0,1,2,3,4,6\}$	0	1	2	1	2	4	3
$\{0,1,2,3,4,5,6\}$	0	1	2	1	2	4	3



Chemin $\gamma(0, n-1) = [0, 1, 2, 6]$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 6$.

$j = 1$: $k \in \{3\}$ $\quad \alpha = \lambda_3 + v_{31} + \lambda_6 - \lambda_1 = 1 + 4 + 3 - 1 = 7$

valeur $= 7$, pivot$_1 = 3$, pivot$_2 = 1$.

$j = 2$; $k \in \{3, 4\}$ $\quad k = 3$ $\quad \alpha = \lambda_3 + v_{32} + \lambda_6 - \lambda_2 = 1 + 7 + 3 - 2 = 9$

$\alpha >$ valeur ;

$k = 4$: $\alpha = \lambda_4 + v_{42} + \lambda_6 - \lambda_2 = 2 + 3 + 3 - 2 = 6 <$ valeur

valeur $= 6$, pivot$_1 = 4$, pivot$_2 = 2$.

$j = 3$: $k \in \{5\}$ $\quad k = 5$ $\quad \alpha = \lambda_5 + v_{56} + \lambda_6 - \lambda_6 = 4 + 1 + 2 - 2 = 5$

valeur $= 5$; pivot$_1 = 5$, pivot$_2 = 6$.

Second $= [0, 1, 2, 5, 6]$

2) <u>Etude de la complexité en fonction de n et m:</u>

On suppose que le graphe est codé par la file des successeurs et des prédécesseurs.

2.1) Quelles sont les complexités des phases 1, 2, 3 et 4 de l'algorithme ?

En déduire la complexité totale.

2.2) Quelle amélioration peut-on proposer pour diminuer cette complexité ?

Complexité de l'algorithme :
Phase 1 : O(n^2)
Phase 2 : O(n)
Phase 3 : O(m)
Phase 4 : O(n).
Complexité globale O(n^2).

On peut améliorer la complexité en utilisant l'algorithme de Bellman pour la phase 1. On obtiendra alors une complexité globale de o(m).

3) Preuve de l'algorithme :
On note premier = gamma(0,n-1) = (y0=0,y1,...,yp=n-1) le plus court chemin obtenu dans la phase 1) de l'algorithme et deuxième = (z0=0,z1,...,zq=n-1) un second plus court chemin de 0 à n-1.

3.1) Montrer qu'il existe un entier r tel que yp=zq , yp-1=zq-1 ,..., yp-r=zq-r et yp-r-1<> zq-r-1.

On parcours les deux chemins, premier et deuxième, en partant de la destination (n-1). Puisque les deux chemins sont différents il existe un r tel que yp-r=zq-r et yp-r-1<> zq-r-1;

3.2) Quelle est la propriété remarquable du chemin (z0=0,z1,...,zq-r-1) ?

le chemin (z0=0,z1,...,zq-r-1) est necessairement le plus court de z0=0 à zq-r-1, car si autrement on aurait ou construire un chemin different de « deuxième » et de gamma(0,n-1) et de cout inférieur à celui du « deuxième » ce qui est en contradiction avec le fait que le « deuxième » est le vrai second plus court chemin.

3.3) En déduire la validité de l'algorithme.
Pendant l'algorithme on calcule tous les chemins qui ont les deux propriétés du chemin deuxième citées ci-dessus et on garde le plus court. Par conséquent on obtient second= le deuxième plus court chemin.