MT09-A2019 – Examen final – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient $T > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)), \ \forall t \in [0, T], \qquad y(0) = y_0.$$

On veut approcher la solution y de cette équation différentielle à l'aide du schéma

$$z_{n+1} = z_n + h\left(\frac{3}{2}f(t_n, z_n) - \frac{1}{2}f(t_{n-1}, z_{n-1})\right),$$

pour $n \geq 1$ et où $h > 0$ et z_1, z_0 sont donnés.

1. Définir l'erreur de troncature du schéma.
2. Écrire les développements de Taylor de $y(t_n)$ et de $y'(t_{n-1})$.
3. En déduire l'ordre du schéma.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient $n \geq 2$ réels $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. On considère la matrice de la regression linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = A^T A.$$

1. Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans quel cas a-t-on $|(a, b)| = \|a\|_2 \, \|b\|_2$? Le symbole $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

2. Calculer M et vérifier que $\det M \geq 0$. *Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans* $\mathbb{R}^n$.

3. Que se passe-t-il si $\det M = 0$. —*Utiliser* 1—. En déduire que M est inversible.

4. Établir que $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} A^T A$. En déduire par un argument différent que M est inversible.

Exercice 3 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soient A et b la matrice et le vecteur définis par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la décomposition QR de la matrice A donne le résultat ci-dessous :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que Q et R possèdent les propriétés de la décomposition $A = QR$.

2. Expliciter le système équivalent aux équations normales faisant intervenir Q et R.

3. Résoudre ce système.

MT09-A2019- Examen final
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 8 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

1. Soient deux réels $\lambda > 0$ et $T > 0$. On considère le problème différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & -\lambda x(t), \quad \forall t \in]0,T[, \\ x(0) & = & x^0, \end{array}\right. \tag{1}$$

où x^0 est un réel de $\mathbb{R}$ tel que $x^0 \neq 0$.

(a) Donner la solution de (1).

(b) Soit un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = nh$ pour $n = 0, \ldots, N$. On considère le schéma suivant pour (1)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} & = & -\lambda z_{n+1}, \\ z_0 & = & x^0. \end{array}\right.$$

De quel schéma s'agit-il? Exprimer z_n en fonction de x^0, h, λ et n.

(c) Montrer que z_N (le dernier itéré) vérifie

$$\lim_{N\to\infty (h\to 0)} z_N = x(T).$$

2. Soit la fonction $g : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ uniformément Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$\|g(t, y) - g(t, z)\| \leq L\|y - z\| , \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ \forall y, z \in \mathbb{R}^p. \tag{2}$$

On se donne $h > 0$ tel que $Lh < 1$.

(a) Soit $b \in \mathbb{R}^p$ et $t \in [0, +\infty[$ fixé. Écrire l'algorithme de point fixe pour la fonction $f : x \to hg(t, x) + b$.

(b) Montrer que f possède un point fixe unique. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p$ unique tel que

$$x - hg(t, x) = b.$$

Cet x dépend de b mais aussi, bien entendu, de t.

(c) Donner une majoration de l'écart entre le point fixe x et les itérés de l'algorithme.
<u>*On ne demande pas de démontrer cette majoration.*</u>

(d) On pose $G(t, b) = x$. Montrer que

$$\|G(t, b) - G(t, d)\| \leq \frac{1}{1 - Lh}\|b - d\| , \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ \forall b, d \in \mathbb{R}^p.$$

(e) On définit

$$\begin{array}{rcl} \phi : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^p\times]0, \dfrac{1}{L}[& \mapsto & \mathbb{R}^p \\ (t, b, h) & \to & g(t + h, G(t + h, b)). \end{array}$$

Établir que

$$\|\phi(t, b, h) - \phi(t, d, h)\| \leq \frac{L}{1 - Lh}\|b - d\| , \qquad \forall t \in [0, +\infty[, \ \forall h \in]0, \frac{1}{L}[, \ \forall b, d \in \mathbb{R}^p.$$

3. On considère le problème différentiel vectoriel

$$\begin{cases} x'(t) &= g(t, x(t)) \quad \forall t \in]0, T[, \\ x(0) &= x^0, \end{cases} \tag{3}$$

où x^0 est un vecteur de $\mathbb{R}^p$. g est la fonction définie dans la question 2. On admet que le problème (3) admet une solution unique. L'objectif est l'étude du schéma d'Euler implicite qui s'écrit comme suit

$$\begin{cases} z_{n+1} &= z_n + hg(t_{n+1}, z_{n+1}), \\ z_0 &= x^0. \end{cases}$$

On suppose que $Lh < \alpha$ avec $\alpha < 1$.

(a) Montrer que, pour tout h tel que $Lh < \alpha$, la suite $(z_n)_{0 \leq n \leq N}$ est bien définie. C'est-à-dire que si z_n est donné alors z_{n+1} existe et est unique.

(b) Donner une majoration de l'erreur de troncature. En déduire que le schéma d'Euler implicite est d'ordre un.

(c) Montrer que le schéma peut être mis sous la forme

$$\begin{cases} z_{n+1} &= z_n + h\phi(t_n, z_n, h), \\ z_0 &= x^0, \end{cases}$$

où la fonction ϕ est uniformément Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. —*Utiliser la question 2*—. En déduire que le schéma d'Euler implicite est zéro-stable.

(d) Conclure qu'il est convergent et donner une majoration de l'erreur

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|z_n - x(t_n)\|.$$

4. **Programmation :** écrire une fonction scilab :

```
[X] = eulerimpl(g, x0, T, tol)
```

qui implémente le schéma d'Euler implicite avec la méthode du point fixe. On précisera à quoi sert le paramètre `tol`.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 7 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

On considère la matrice A dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n \geq 1$. On suppose que $\text{Ker}A = \{0\}$. Soit $b \in \mathbb{R}^m$ donné ; il est ***non nul*** sauf mention explicite du contraire.
On considère deux problèmes. Le premier est l'équation linéaire

$$Ax = b. \tag{4}$$

Le second est un problème de moindres carrés. La fonction à minimiser $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie par

$$J(y) = \frac{1}{2}\|Ay - b\|_2^2 = \frac{1}{2}\|Ay\|_2^2 - (b, Ay) + \frac{1}{2}\|b\|_2^2.$$

Le symbole $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$. On cherche à résoudre le problème :
trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$J(x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} J(y). \tag{5}$$

1. On suppose que $b \in \text{Im}\, A$.
   (a) Pourquoi (4) admet-il une solution unique $x \in \mathbb{R}^n$?
   (b) Justifier que x est aussi la seule solution de (5).
2. On suppose que $b \in \text{Ker}A^T$.
   (a) Montrer que $x = 0$ est la seule solution de (5). Calculer $J(x)$.
   (b) $x = 0$ peut-il être solution de (4)?
3. On suppose que b est quelconque non nul.
   (a) Déterminer le rang de A. En déduire le rang de A^T. Quelle est la dimension de $\text{Ker}A^T$.
   (b) Montrer que $\text{Ker}A^T$ et $\text{Im}\, A$ sont orthogonaux. En déduire, à l'aide des dimensions, que

   $$\text{Ker}A^T \oplus \text{Im}\, A = \mathbb{R}^m.$$

   avec une somme orthogonale.
   (c) Établir la décomposition unique de b :

   $$b = f + Ad \qquad \text{avec } f \in \text{Ker}A^T, d \in \mathbb{R}^n.$$

   (d) Vérifier que

   $$J(y) = \frac{1}{2}\|A(y-d)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

   Quelle est la solution x de (5)? Donne-t-elle la solution de (4)?
   (e) Montrer que x est l'unique solution des équations normales associés à (5).
4. Soient A et b la matrice et le vecteur respectivement définis par

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

   (a) A-t-on $b \in \text{Im}\, A$? $b \in \text{Ker}A^T$?
   (b) Effectuer à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt la décomposition $A = ET$ avec $E^TE = I_2$ et T triangulaire supérieure.
   (c) Expliciter le système équivalent aux équations normales faisant intervenir E et T.
   (d) Résoudre ce système.
   (e) Tracer la droite qui passe au plus près des points de coordonnées : $(3; 2.5), (-1; -1.5)$ et $(1; -1)$. <u>*On demande de bien expliquer ce que vous faites.*</u>