MT09-A2020 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2.5 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle ($n > 0$). Soit une base orthonormée $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ pour A. On suppose que les valeurs propres sont ordonnées : $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

1. Que vaut $y_i^T y_j$ pour $i, j = 1, \dots, n$?
2. En utilisant la base $(y_i)_{i=1,\dots,n}$, calculez $x^T x$.
3. Calculez $x^T Ax$.
4. En déduire : $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_n$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ pour $n > 0$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que toutes les sous-matrices principales de A, notées $[A]_k$ pour $k = 1, \dots, n$, sont symétriques définies positives.
2. Déterminer le noyau d'une matrice symétrique définie positive.
3. Conclure sur la faisabilité de la factorisation $A = LU$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2.5 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifient les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Donner la valeur de $\varepsilon_{\text{mach},10}$.
3. Soit un réel $\varepsilon > 0$. On étudie le système $\begin{bmatrix} -\varepsilon & -2 \\ 1 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+\varepsilon \\ 4.5 \end{bmatrix}$.

   Effectuer l'élimination de Gauss en arithmétique exacte sans permutation.
4. On suppose que l'on travaille en flottant en base 10 avec 3 chiffres significatifs et on prend $\varepsilon = 10^{-3}$.
   (a) Calculer $-2 \oplus \varepsilon$.
   (b) Calculer $4.5 \oplus \left(\frac{-2 \oplus \varepsilon}{\varepsilon}\right)$.
   (c) Calculer $5.5 \ominus \frac{2}{\varepsilon}$.
   (d) Résoudre le système en arithmétique flottante. On fera attention à bien décomposer les étapes. Pour information, $\mathrm{fl}\left(\dfrac{200}{199}\right) = 1.01$.

MT09-A2020 - Examen médian
Durée : 1 heure.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *7 points.*
RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 8 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Soit n un entier strictement positif et soient deux vecteurs $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.
On s'intéresse à la factorisation de Cholesky $A = CC^T$ d'une matrice A symétrique définie positive et tridiagonale de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On notera C_j la $j$ème colonne de C.

1. Rappeler les propriétés de C.
2. Par identification de la première colonne de C, montrer que C_1 est de la forme $C_1 = (c_1, d_2, 0, ..., 0)^T$ et exprimer les valeurs de c_1 et d_2 en fonction de a_1 et b_1.
3. Par identification de la deuxième colonne de C, montrer que C_2 est de la forme $C_2 = (0, c_2, d_3, 0, ..., 0)^T$ où l'on exprimera c_2 et d_3.
4. Montrer par récurrence que les colonnes C_j de C s'écrivent sous la forme :
$C_j = (0, \ldots, 0, c_j, d_{j+1}, 0, ..., 0)^T$, où l'on exprimera c_j et d_{j+1}.
5. Écrire une fonction scilab : `[c, d] = choltridiag(a, b)`
réalisant la factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive tridiagonale (on fera notamment attention à l'ordre des opérations).
6. Compter le nombre d'additions et de multiplications de cette fonction.
7. Calculer la factorisation LU (on parle bien de la factorisation LU et non de Cholesky) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Que constatez-vous ? La matrice A est-elle définie positive ? Expliquer pourquoi.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit la matrice bidiagonale de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ pour $n > 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & & & \\ & 1 & -2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

On rappelle que $\sum_{i=0}^{p} 2^i = 2^{p+1} - 1$, si p est un entier.

1. Calculer l'inverse de A en résolvant $Ax = b$ pour b quelconque. On pourra faire une récurrence.
2. Prendre $b = [-1; -1; \ldots; -1; 1]^T$, calculer x tel que $Ax = b$. Que valent $\|x\|_\infty$ et $\|b\|_\infty$?
3. Prendre $\delta b = \epsilon[1; 1; \ldots; 1; 1]^T$, calculer δx tel que $A\,\delta x = \delta b$. Donner $\|\delta x\|_\infty$ et $\|\delta b\|_\infty$.
4. Montrer que la première ligne de A^{-1} vaut : $(\underline{A}^{-1})_1 = [1\ 2\ 4\ \ldots\ 2^{n-1}]$.
5. Calculer $|||A|||_\infty$ et $|||A^{-1}|||_\infty$. En déduire $\chi_\infty(A)$, le conditionnement de A.
6. Commenter les résultats trouvés.