MT09-A2020 – Examen final – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient les réels a, b, c. On définit la fonction

$$g(t) = \begin{cases} at + b & \text{si } t < 0, \\ ct + b & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On se donne $t_1 < t_2 < \cdots < t_p < 0 < t_{p+1} < t_{p+2} < \cdots < t_m$, vérifiant $p \geq 1$ et $m > p+1$. Soient également $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dans $\mathbb{R}$. On cherche la courbe $t \mapsto g(t)$ qui passe au plus près des points $(t_i, y_i)_{i=1,\ldots,m}$.

1. Formuler le problème de moindres carrés correspondant. On explicitera bien la matrice A associée.
2. Montrer que ce problème admet une solution unique.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

A est une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$. On suppose A de rang *maximal*. Rappelons que la méthode de Schmidt donne la décomposition $A = ET$, où E vérifie $E^T E = I_n$ et T est triangulaire supérieure. Soit $b \in \mathbb{R}^m$ donné. On cherche à résoudre l'équation linéaire

$$Ax = b. \tag{1}$$

1. Préciser les dimensions de E et de T.
2. Quel est le rang de A? En déduire que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.
3. $A^T A$ est-elle inversible? Est-ce que T est inversible? Justifier!
4. On suppose que $b \notin \operatorname{Im} A$.
   (a) Expliquer pourquoi on résout l'équation $A^T A x_* = A^T b$, plutot que (1).
   (b) Justifier que $x_* = (A^T A)^{-1} A^T b$.
   (c) Cette dernière expression est-elle utile pour une programmation Scilab? Proposer une alternative à un programmeur.

Exercice 3 *(barème approximatif : 3 points)*

La fonction f est definie sur l'intervalle $[-1,1]$ par : $x \mapsto f(x) = x^3$.

1. On construit la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ par l'algorithme :

$$x_0 \in]-1,1[, \qquad x_{k+1} = f(x_k), \;\; \forall k \geq 0.$$

   (a) Donner le nom et le but de cet algorithme. Représenter f et décrire sur le graphe la construction de la suite $(x_k)_{k\geq 0}$.

   (b) Donner x_k en fonction de x_0 et k. Donner sa limite $x^\star$. L'ordre de convergence de la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ vers $x^\star$ est-il 1?

2. On construit la suite $(z_k)_{k\geq 0}$ telle que

$$z_0 \in [-1,1] \setminus \{0\}, \qquad z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \;\; \forall k \geq 0.$$

   (a) Quel est cet algorithme? Que permet-il d'approcher? Donner sans preuve l'ordre de convergence théorique de cet algorithme.

   (b) Représenter f et décrire sur le graphe la méthode pour contruire la suite $(z_k)_{k\geq 0}$.

   (c) i. Expliciter z_{k+1} en fonction de z_k. En déduire z_k en fonction de z_0 et k. Donner sa limite $z^\star$.

   ii. Quel est l'ordre de convergence de la suite $(z_k)_{k\geq 0}$ vers $z^\star$?

   iii. Retrouve-t-on l'ordre de convergence prévu théoriquement pour cet algorithme ? Avez-vous une explication?

MT09-A2020- Examen final
Durée : 1h00.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *7 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. L'objectif est d'approcher la solution du système linéaire

$$Ax = b \tag{2}$$

par un algorithme itératif de type (vu en cours)

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$

1. Soit $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et α un réel > 0. On pose $M = \frac{1}{\alpha}P$. Donner la matrice N. En déduire qu'en cas de convergence, la limite de la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$, notée $x^\star$, est solution de (2).
2. Écrire l'algorithme sous la forme
$$x^{(k+1)} = C_\alpha x^{(k)} + d. \tag{3}$$
Déterminer la matrice des itérations C_α et le vecteur d.
3. On choisit $P = D$, la matrice diagonale dont les coefficients sont ceux de la matrice A, ce qui signifie : $D = \text{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$.
   (a) On suppose que D est inversible. Déterminer les coefficients de C_α.
   (b) En déduire l'expression de $|||C_\alpha|||_\infty$.
4. On choisit toujours $P = D$. On suppose maintenant que A est à diagonale strictement dominante, *i.e.* $\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ pour tout $i \leq n$.
   (a) Prouver que la matrice D est inversible.
   (b) Établir que $|||C_\alpha|||_\infty < |1-\alpha| + |\alpha|$.
   (c) Donner une majoration de $\|x^{(k)} - x^\star\|_\infty$ en fonction de $|||C_\alpha|||_\infty$, $x^{(0)}$, $x^\star$ et k.
   (d) En déduire une condition suffisante sur α pour que l'algorithme (3) converge.
   (e) Prouver que la matrice $(I_n - C_{1/2})$ est inversible. En déduire que A est inversible et donc que la solution de (2) est unique.

Exercice 2 *(barème approximatif : 5.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soient les réels t_0 et $T > 0$. On se donne la fonction $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $(\theta, u) \mapsto f(\theta, u)$. Étant donné un réel y_0, on veut résoudre numériquement le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{4}$$

Soit $N > 0$, on pose $h = \frac{T}{N}$ et on note $t_{n+1} = t_n + h$. On étudie le schéma numérique destiné à résoudre (4) :

$$z_0 = y_0, \quad \forall n = 0, 1, \dots \begin{cases} \tilde{z}_{n+2/3} & = & z_n + \frac{2}{3}hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} & = & z_n + \frac{1}{4}hf(t_n, z_n) + \frac{3}{4}hf(t_n + \frac{2}{3}h, \tilde{z}_{n+2/3}). \end{cases} \tag{5}$$

1. Étant donné t_n et $y(t)$ solution de (4), on introduit la fonction ψ :
   $h \mapsto \psi(h) = f(t_n + \dfrac{2}{3}h,\ y(t_n) + \dfrac{2}{3}hy'(t_n))$.
   (a) Calculer le développement de Taylor à l'ordre 1 de ψ en 0.
   (b) Calculer y'', la dérivée à l'ordre 2 de y, en fonction de f et de ses dérivées.
   (c) Écrire l'erreur de troncature locale.
   (d) Que peut-on en déduire sur l'ordre de consistance du schéma numérique (5)? Bien justifier.
2. On suppose que la fonction f vérifie une condition de Lipschitz en y :
   $$\exists C,\ \forall t \in [t_0, t_0 + T],\ \forall z, y \in \mathbb{R}\ |f(t, y) - f(t, z)| \leq C|y - z|.$$
   Le schéma numérique est-il stable ? Bien justifier.
3. Le schéma numérique est-il convergent ? Justifier et donner son ordre de convergence.
4. **Programmation :** programmer en scilab la fonction
   ```
   [X] = schema(y0, t0, T, N, f)
   ```
   qui implémente le schéma (5).
   On donnera le nombre d'appels de la fonction f à chaque pas de temps.

Exercice 3 *(barème approximatif : 3.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

On pose $(t_i = i, x_i = (i)^2, 1 \leq i \leq 3)$ et (y_1, y_2, y_3).
On rappelle qu'une fonction ϕ est paire sur $\mathbb{R}$ si elle vérifie $\forall x \in \mathbb{R}\ \phi(-x) = \phi(x)$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation P tel que $P(x_i) = y_i, i \leq 3$. Commencer par préciser son degré.
2. On considère $Q(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k x^k$. Sous quelles conditions sur $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ le polynôme Q est-il pair? Donner précisément son degré (en fonction de la parité de n).
3. On note Q le polynôme d'interpolation pair qui vérifie $Q(t_i) = y_i$ et donc necessairement $Q(-t_i) = y_i$ pour tout $i \leq 3$.
   (a) Quel est son degré exact? Justifier!
   (b) Déterminer son expression (il est possible d'utiliser le polynôme P).