**MT09-A2021 – Examen médian – Questions de cours**
*Durée : 45 minutes. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé*

| NOM PRÉNOM : | Place n°: |
|---|---|
| | |

**ATTENTION, il y a 4 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!**

## Exercice 1 *(barème approximatif : 2.5 points)*

1. Énoncer le théorème du point fixe, en précisant bien les hypothèses et les conclusions.

   **Réponse : Cf. Cours. Trois hypothèses: $g$ doit être définie sur un intervalle $I$ fermé non vide de $\mathbb{R}$, $g$ doit être contractante sur $I$ avec une constante $\lambda$ (donnez la définition), et l'intervalle $I$ doit être stable par $g$ ($g(I) \subset I$).**

   **(Dans une version plus faible du théorème(avec des hypothèses plus fortes), on suppose que $I = [a, b]$ où $a < b$ ($I$ est non seulement fermé non vide, mais aussi *borné*), que $g$ est de classe $C^1$ sur $I$ et que $\exists \lambda < 1$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|g'(x)| \leq \lambda$ (ce qui implique que $g$ est contractante sur $I$ grâce au théorème des accroissements finis).)**

   **Conclusions : il existe un unique point fixe dans $I$, qui est la limite de la suite de point fixe définie par $x_{n+1} = g(x_n)$, $n > 0$ et $x_0 \in I$. De plus**

   $$|x_n - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

   □

2. Soit une fonction $g$ contractante sur un intervalle $I$. Montrer que $g$ ne peut admettre au plus qu'un seul point fixe sur $I$.

   **Réponse : Si $x$ et $y$ sont deux points fixes pour $g$ dans $I$, alors on a**

   $$|g(x) - g(y)| = |x - y| \leq \lambda|x - y| \iff (1 - \lambda)|x - y| \leq 0,$$

   **où $0 < \lambda < 1$, ce qui implique que $|x - y| \leq 0$ et donc $x = y$. Le point fixe est unique.** □

3. On cherche à calculer numériquement une solution $\hat{x}$ de l'équation $\hat{x} = 2 + \ln \hat{x}$.

   On utilise la méthode de point fixe, qui partant d'une valeur initiale $x_0$ calcule la suite $x_{n+1} = 2 + \ln x_n$. Montrer que si $x_0 \in [2, +\infty[$, la suite converge.

   **Réponse : On applique le théorème du point fixe. On pose $g(x) = 2 + \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.**

   **L'intervalle $[2, +\infty[$ est un fermé non vide de $\mathbb{R}$.**

   **On montre que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $2 + \ln(x) \in [2, +\infty[$. On fait le tableau de variation de $g(x) = 2 + \ln x$, qui est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$. $g'(x) = 1/x > 0$, $g$ est croissante et $g(2) = 2 + \ln(2) > 2$, donc $g([2, +\infty[) \subset [2, +\infty[$.**

   **Pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $g'(x) = 1/x \in [0, 1/2]$, donc $|g'(x)| \leq 1/2 < 1$ et donc d'après le théorème des accroissements finis, $g$ est contractante sur $[2, +\infty[$ : en effet, pour tout $x, y$ dans $[2, +\infty[$, il existe $\xi$ dans cet intervalle tel que : $g(x) - g(y) = g'(\xi)(x - y)$, et donc $|g(x) - g(y)| \leq \max_{t \in [2,+\infty[} |g'(t)|\ |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.**

   **Conclusion : le théorème du point fixe s'applique, le point fixe unique existe et est unique dans $[2, +\infty[$ et la suite converge vers ce point fixe.** □

**Exercice 2** *(barème approximatif : 3 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ inversible.

1. Donner les 2 propositions équivalentes au fait que la factorisation $A = LU$ est faisable sans permutation. On donnera les hypothèses usuelles faites sur $L$ et $U$. *(On ne demande pas de prouver ces équivalences).*

   **Réponse : Cf. Cours. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :**

   - **Proposition 1 : Tous les pivots $a_{kk}^{(k)}$ sont définis et $a_{kk}^{(k)} \neq 0,\ k = 1, \dots, n$.**
   - **Proposition 2 : $A$ admet une factorisation $A = LU$ avec $U$ inversible .**
   - **Proposition 3 : $[A]_1,\ [A]_2,\ \dots, [A]_n$ inversibles.**

   □

2. (a) Donner la définition d'une matrice symétrique définie positive.

   **Réponse : Cf. Cours. Deux définitions possibles :**

   - $A^T = A$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}^n$ **:** $x \neq 0 \implies x^T Ax > 0$.
   - $A^T = A$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^T Ax \geq 0$, **et** $\forall x \in \mathbb{R}^n$ **:** $x^T Ax = 0 \implies x = 0$.

   □

   (b) Montrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible.

   **Réponse : Soit $x \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $Ax = 0$, donc $x^T Ax = x^T 0 = 0$, donc comme $A$ est SDP, ceci implique que $x = 0$. La matrice $A$ est donc injective ($\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$), et comme elle est carrée, elle est aussi inversible (cf. théorème du rang).** □

   (c) Montrer que si $A$ est symétrique définie positive, alors la factorisation $LU$ de $A$ est faisable.

   **Réponse : Cf. Lemme 2.5.2. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. On montre que $[A]_k$ est SDP : Soit $k$ fixé et $\tilde{z} \in \mathbb{R}^k$ un vecteur quelconque non nul. On définit**

   $$z = (\tilde{z}^\top,\ 0,\ \dots, 0)^\top = (z_1,\ z_2,\ \dots, z_k,\ 0,\ \dots,\ 0)^\top.$$

   **Comme $A$ est définie positive et que $z \neq 0$,**

   $$0 < z^\top Az = \tilde{z}^\top [A]_k \tilde{z},$$

   **ce qui montre que $[A]_k$ est définie positive.**

   **Donc d'après la question 2.b), elle est inversible.**

   **Donc d'après la question 1., la factorisation $A = LU$ est faisable.**

   □

   (d) Montrer que si la factorisation de Cholesky de $A$ est faisable, alors $A$ est symétrique définie positive.

**Réponse : La factorisation de Cholesky s'écrit : $A = CC^T$, où $C$ est triangulaire inférieure avec $C_{ii} > 0$ pour $i = 1, \dots, n$.**

**Donc $A^T = (C^T)^T C^T = CC^T = A$.**

**De plus soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $x^T Ax = x^T CC^T x = (C^T x)^T C^T x = \|C^T x\|_2^2 \geq 0$.**

**Si $x^T Ax = 0$, alors ceci implique $C^T x = 0$ (propriété de la norme). Or, comme $C^T$ est triangulaire supérieure avec des termes diagonaux non nuls, donc elle est inversible et donc $\mathrm{Ker}(C^T) = \{0\}$. On conclut que $x = 0$.**

**Donc $A$ est SDP.** □

## Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un réel $\varepsilon > 0$. On étudie le système

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. Effectuer l'élimination de Gauss en arithmétique exacte.

   **Réponse : le déterminant de la matrice vaut $7\varepsilon - 1$, donc la matrice est inversible si $\varepsilon < 1/7$, ce qu'on suppose.**

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon x_1 + x_2 &=& 1-\varepsilon \\ (7 - \frac{1}{\varepsilon})x_2 &=& 6 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon x_1 + x_2 &=& 1-\varepsilon \\ (7 - \frac{1}{\varepsilon})x_2 &=& 7 - \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right. \\ &\iff x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

2. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifient les constantes $t$, $L$ et $U$ (notations du cours).

   **Réponse : Cf. Cours.** □

3. On suppose que l'on travaille dans $\mathcal{F}_{10}$ avec $t = 3$ On prend $\varepsilon = 10^{-4}$ dans (1). Refaire les calculs de la question 1. en arithmétique flottante.

   **Réponse : on fait les calculs flottants :**

$$\begin{aligned} 1 \ominus \varepsilon &= \mathrm{fl}(1.00 - 0.0001) = \mathrm{fl}(0.9999) = 1.00 \\ 7 \ominus \frac{1}{\varepsilon} &= \mathrm{fl}(7.00 - 10000) = \mathrm{fl}(-9993) = -9.99 \times 10^3 \\ 6 \ominus \left( \frac{1 \ominus \varepsilon}{\varepsilon} \right) &= \mathrm{fl}(6.00 - \frac{1.00}{\varepsilon}) = \mathrm{fl}(6.00 - 10000) = \mathrm{fl}(-9994) = -9.99 \times 10^3, \end{aligned}$$

   **donc on trouve en arithmétique flottante**

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b} &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 &=& 1.00 \\ -9.99 \times 10^3 \widetilde{x}_2 &=& -9.99 \times 10^3 \end{array} \right. \\ &\iff \widetilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   **Il y a une erreur catastrophique.** □

## Exercice 4 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un entier $n \geq 1$ et soit une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner la *définition* de la norme $|||A|||$ (norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$).

   **Réponse : Cf. Cours.**

$$|||A||| = \max_{x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

□

2. Donner les propriétés de $|||\cdot|||$ en tant que norme matricielle.

   **Réponse : Cf. Cours. La norme subordonnée est une norme matricielle, donc elle possède les propriétés suivantes, pour toutes matrices $A, B$ dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ :**

   - $|||A||| \geq 0$,
   - $|||A||| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0$,
   - $|||\lambda A||| = |\lambda|\ |||A|||$,
   - $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$,
   - $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$.

   $\square$

3. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$, $|||A|||_1$, $|||A|||_2$.

   **Réponse : On a** $|||A|||_\infty = \max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^{2} |A_{ij}| = \|(\underline{A}_3)^T\|_1 = 7$**,** $|||A|||_1 = \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{3} |A_{ij}| = \|A_1\|_1 = 9$**. Comme**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

   **est une matrice diagonale, ses valeurs propres sont sur la diagonale et on a** $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{30}$**.** $\square$

**MT09-A2021 - Examen médian**
*Durée : 45 minutes.*
*Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques*

Questions de cours déjà traitées : environ *10 points.*
**RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!**

## Exercice 1 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice $M$ appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. On suppose que $|||M||| < 1$.

   (a) Déterminer le noyau de $I + M$ et en déduire que $I + M$ est inversible.
   **Réponse : soit $x \in \text{Ker}(I + M)$, donc $(I + M)x = 0$ donc $-x = Mx$, ce qui implique que $\|-x\| = \|x\| = \|Mx\| \leq |||M|||\ \|x\|$ d'après les propriétés des normes subordonnées. Si $\|x\| \neq 0$, alors $|||M|||\ \|x\| < \|x\|$ ce qui est impossible, donc $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.**
   **On conclut que $\text{Ker}(I+M) = \{0\}$ et donc $(I+M)$ est injective donc bijective (car carrée).** □

   (b) On pose $N = (I + M)^{-1}$. En partant de la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que
   $$|||N||| \leq \frac{1}{1 - |||M|||}.$$
   **Réponse : la matrice $N$ existe d'après la question précédente. On a $N(I+M) = I$, donc $N = I - NM$, ce qui implique que $|||N||| \leq |||I||| + |||NM|||$ d'après l'inégalité triangulaire. Pour une norme subordonnée $|||I||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$ et $|||NM||| \leq |||N|||\ |||M|||$. Il vient donc $|||N||| \leq 1 + |||N|||\ |||M|||$, d'où $|||N|||(1 - |||M|||) \leq 1$. Comme $|||M||| < 1$, on peut diviser par $1 - |||M||| > 0$ et on obtient l'inégalité demandée.** □

2. Soit $A$ dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous appelons $x \in \mathbb{R}^n$ la solution du système $Ax = b$. Nous considérons le système perturbé $(A + \delta A)\hat{x} = b$, où $\delta A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. On pose $\delta x = \hat{x} - x$.

   (a) Quelle équation satisfait $\delta x$ en fonction de $A$, $\delta A$ et $x$?
   **Réponse : en développant $(A + \delta A)\hat{x} = b$, et en utilisant le fait que $Ax = b$, on obtient $\delta A\, x + (A + \delta A)\delta x = 0 \Leftrightarrow (A + \delta A)\delta x = -\delta A\, x$, ce qui s'écrit encore avec $A$ inversible**
   $$(I + A^{-1}\delta A)\delta x = -A^{-1}\delta A\, x. \tag{2}$$
   □

   (b) On suppose que $|||A^{-1}\delta A||| < 1$. Déduire des questions précédentes que
   $$\|\delta x\| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}\ |||\delta A|||\ \|x\|.$$
   **Réponse : comme $|||A^{-1}\delta A||| < 1$, d'après la question 1., la matrice $(I + A^{-1}\delta A)$ est inversible et son inverse vérifie :**
   $$|||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}.$$

**De l'équation** $(2)$**, on tire donc** $\delta x = -(I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta A\, x$ **et donc**

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &= \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta A\, x\| \;\leq\; |||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}|||\; |||A^{-1}|||\; |||\delta A|||\; \|x\| \\ &\leq \frac{1}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}\; |||A^{-1}|||\; |||\delta A|||\; \|x\|. \end{aligned}$$

$\square$

(c) Écrire une majoration de l'erreur relative $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ en fonction du conditionnement de $A$ et de l'erreur relative sur les données $\dfrac{|||\delta A|||}{|||A|||}$ uniquement.

**Réponse : pour** $x \neq 0$**, en utilisant le conditionnement de** $A$ **noté** $\chi(A) = |||A|||\; |||A^{-1}|||$**, on obtient :**

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{1}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}\; \chi(A)\; \frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \\ &\leq \frac{1}{1 - |||A^{-1}|||\; |||\delta A|||}\; \chi(A)\; \frac{|||\delta A|||}{|||A|||} \qquad \textbf{si } |||A^{-1}|||\; |||\delta A||| < 1 \\ &\leq \frac{\chi(A)}{1 - \chi(A)\, \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}}\; \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}. \end{aligned}$$

$\square$

**Exercice 2 :** *(barème approximatif : 5 points )* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice $A$ inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), $M$ appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $b$ dans $\mathbb{R}^n$. On veut calculer $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$. On rappelle que :

- la factorisation $LU$ d'une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^3/3$ multiplications,
- la résolution d'un système linéaire triangulaire (supérieur ou inférieur) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^2/2$ multiplications.

On suppose que la factorisation $A = LU$ est faisable.

1. (a) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $A^{-1}$ est de l'ordre de $\alpha n^3$. On déterminera $\alpha$ et on justifiera clairement la réponse.

   **Réponse : On pose $X = A^{-1} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ($A$ est inversible). Comme**

   $$\begin{aligned} AX = I &\iff AX_j = I_j \textbf{ pour } j = 1, \dots, n, \\ &\iff LUX_j = I_j \quad \textbf{pour } j = 1, \dots, n, \\ &\iff LY_j = I_j \textbf{ et } UX_j = Y_j \quad \textbf{pour } j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

   **il suffit de factoriser $A = LU$ une seule fois (coût $\approx n^3/3$) puis de résoudre $n$ systèmes linéaires triangulaires inférieurs (coût $n \times n^2/2$) et $n$ systèmes linéaires triangulaires supérieurs (coût $n \times n^2/2$).**

   **Total : $\approx n^3/3 + 2n^3/2 = 4n^3/3$ ($\alpha = \frac{4}{3}$).** $\square$

   (b) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $c$ en utilisant $A^{-1}$ est de l'ordre de $\beta n^3$. On déterminera $\beta$.

   **Réponse : On calcule $X = A^{-1}$ (coût $\approx 4n^3/3$), puis on fait le produit matrice$\times$vecteur $c = Xb$ : $c_i = \sum_{j=1}^{n} X_{i,j} b_j$ pour $i = 1, \dots, n$ (coût $n \times n$).**

   **Total : $\approx 4n^3/3 + n^2 \approx 4n^3/3$ ($\beta = \frac{4}{3}$). Le coût du produit matrice$\times$vecteur est négligeable devant celui du calcul de $A^{-1}$.** $\square$

   (c) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $B$ en utilisant $A^{-1}$ est de l'ordre de $\gamma n^3$. On déterminera $\gamma$.

   **Réponse : On calcule $X = A^{-1}$ (coût $\approx 4n^3/3$), puis on fait le produit matrice$\times$matrice $B = XM$ : $B_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k} M_{k,j}$ pour $i$ et $j = 1, \dots, n$ (coût $n^2 \times n$).**

   **Total : $\approx 4n^3/3 + n^3 = 7n^3/3$ ($\gamma = \frac{7}{3}$).** $\square$

2. (a) Montrer que le calcul de $c$ peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires dont on précisera les matrices et les seconds membres.
   Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $c$ en passant par cette méthode.

   **Réponse : On ne calcule pas $X = A^{-1}$, mais on fait seulement la factorisation $A = LU$ (coût $\approx n^3/3$), puis on résout un système triangulaire inférieur et un système triangulaire supérieur : $Ly = b$ et $Uc = y$ (coût $2n^2/2$).**

   **Total : $\approx n^3/3 + n^2 \approx n^3/3$. Le coût de la résolution des systèmes triangulaires est négligeable devant celui de la factorisation $LU$.** $\square$

   (b) Montrer que le calcul de $B$ peut se ramener à la résolution de plusieurs systèmes linéaires dont on précisera, pour chacun d'eux, la matrice, le vecteur inconnu et le second membre.

Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $B$ en passant par cette méthode.

**Réponse : Pour calculer $B$, on résout directement les systèmes correspondant aux colonnes de $M$ (comme pour le calcul de $A^{-1}$, mais avec le "bon" second membre : celui qui est directement utile!) :**

$$\begin{aligned} AB = M &\iff AB_j = M_j \textbf{ pour } j = 1, \dots, n, \\ &\iff LUB_j = M_j \quad \textbf{pour } j = 1, \dots, n, \\ &\iff LY_j = M_j \textbf{ et } UB_j = Y_j \quad \textbf{pour } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**Coût : la factorisation $A = LU$ (coût $\approx n^3/3$), puis on résout $n$ systèmes triangulaires inférieurs et $n$ systèmes triangulaires supérieurs (coût $2n \times n^2/2$).**

**Total : $\approx n^3/3 + n^3 \approx 4n^3/3$.** □

(c) Comparer avec le résultat du 1.

**Réponse : On observe que le calcul de $A^{-1}$ est inutile : la résolution directe (pour les calculs de $c$ et de $B$) évite un facteur $n^3$ multiplications. Il vaut mieux factoriser puis résoudre des systèmes triangulaires!** □

3. On calcule $B$ et $c$ par la méthode du 2. On dispose des fonctions `scilab` :

- `function [L,U] = LU(K)`, qui, étant donnée une matrice $K$, calcule la factorisation LU : $K = LU$.
- `function [x] = solinf(L, b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire inférieure $L$ et le vecteur colonne $b$, résout $Lx = b$.
- `function [x] = solsup(U, b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire supérieure $U$ et le vecteur colonne $b$, résout $Ux = b$.

Utiliser les fonctions ci-dessus pour écrire une fonction `scilab` :

`function [B, c] = calcule(A, M, b)`

qui calcule $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$.

**Réponse : Une implémentation possible est :**

```
====================================
function [B, c] = calcule(A, M, b)
n = size(A, 1);
if length(b) ~= n | size(A, 2) ~= n | size(M, 1) ~= n | size(M, 2) ~= n then
    error('tailles incorrectes');
end

c = zeros(n, 1); y = zeros(n, 1); B = zeros(n, n);

[L, U] = LU(A);
y = solinf(L, b); c = solsup(U, y);
for jj = 1:n
    y = solinf(L, M(:, jj)); B(:, jj) = solsup(U, y);
end
endfunction
====================================
```

□