MT09-A2021 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 45 minutes. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n°:

ATTENTION, il y a 4 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2.5 points)*

1. Énoncer le théorème du point fixe, en précisant bien les hypothèses et les conclusions.
2. Soit une fonction g contractante sur un intervalle I. Montrer que g ne peut admettre au plus qu'un seul point fixe sur I.
3. On cherche à calculer numériquement une solution $\hat{x}$ de l'équation $\hat{x} = 2 + \ln \hat{x}$.

   On utilise la méthode de point fixe, qui partant d'une valeur initiale x_0 calcule la suite $x_{n+1} = 2 + \ln x_n$. Montrer que si $x_0 \in [2, +\infty[$, la suite converge.

Exercice 2 *(barème approximatif : 3 points)*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ inversible.

1. Donner les 2 propositions équivalentes au fait que la factorisation $A = LU$ est faisable sans permutation. On donnera les hypothèses usuelles faites sur L et U. *(On ne demande pas de prouver ces équivalences).*
2. (a) Donner la définition d'une matrice symétrique définie positive.

   (b) Montrer qu'une matrice symétrique définie positive est inversible.

   (c) Montrer que si A est symétrique définie positive, alors la factorisation LU de A est faisable.

   (d) Montrer que si la factorisation de Cholesky de A est faisable, alors A est symétrique définie positive.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un réel $\varepsilon > 0$. On étudie le système

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. Effectuer l'élimination de Gauss en arithmétique exacte.
2. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifient les constantes t, L et U (notations du cours).
3. On suppose que l'on travaille dans $\mathcal{F}_{10}$ avec $t = 3$ On prend $\varepsilon = 10^{-4}$ dans (1). Refaire les calculs de la question 1. en arithmétique flottante.

Exercice 4 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit un entier $n \geq 1$ et soit une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner la *définition* de la norme $|||A|||$ (norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$).
2. Donner les propriétés de $|||\cdot|||$ en tant que norme matricielle.
3. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$, $|||A|||_1$, $|||A|||_2$.

MT09-A2021 - Examen médian
Durée : 45 minutes.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *10 points*.
RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. On suppose que $|||M||| < 1$.
   (a) Déterminer le noyau de $I + M$ et en déduire que $I + M$ est inversible.
   (b) On pose $N = (I + M)^{-1}$. En partant de la définition de l'inverse d'une matrice, montrer que
$$|||N||| \leq \frac{1}{1 - |||M|||}.$$
2. Soit A dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et b dans $\mathbb{R}^n$. Nous appelons $x \in \mathbb{R}^n$ la solution du système $Ax = b$. Nous considérons le système perturbé $(A + \delta A)\hat{x} = b$, où $\delta A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. On pose $\delta x = \hat{x} - x$.
   (a) Quelle équation satisfait δx en fonction de A, δA et x?
   (b) On suppose que $|||A^{-1}\delta A||| < 1$. Déduire des questions précédentes que
$$\|\delta x\| \leq \frac{|||A^{-1}|||}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}\, |||\delta A|||\, \|x\|.$$
   (c) Écrire une majoration de l'erreur relative $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ en fonction du conditionnement de A et de l'erreur relative sur les données $\frac{|||\delta A|||}{|||A|||}$ uniquement.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit une matrice A inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$), M appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et b dans $\mathbb{R}^n$. On veut calculer $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$. On rappelle que :

- la factorisation LU d'une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^3/3$ multiplications,
- la résolution d'un système linéaire triangulaire (supérieur ou inférieur) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ nécessite de l'ordre de $n^2/2$ multiplications.

On suppose que la factorisation $A = LU$ est faisable.

1. (a) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer A^{-1} est de l'ordre de αn^3. On déterminera α et on justifiera clairement la réponse.
   (b) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer c en utilisant A^{-1} est de l'ordre de βn^3. On déterminera β.
   (c) Montrer que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B en utilisant A^{-1} est de l'ordre de γn^3. On déterminera γ.
2. (a) Montrer que le calcul de c peut se ramener à la résolution de systèmes linéaires dont on précisera les matrices et les seconds membres.
   Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer c en passant par cette méthode.
   (b) Montrer que le calcul de B peut se ramener à la résolution de plusieurs systèmes linéaires dont on précisera, pour chacun d'eux, la matrice, le vecteur inconnu et le second membre.
   Évaluer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer B en passant par cette méthode.
   (c) Comparer avec le résultat du 1.
3. On calcule B et c par la méthode du 2. On dispose des fonctions `scilab` :
   - `function [L,U] = LU(K)`, qui, étant donnée une matrice K, calcule la factorisation LU : $K = LU$.
   - `function [x] = solinf(L, b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, résout $Lx = b$.
   - `function [x] = solsup(U, b)`, qui, étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, résout $Ux = b$.

   Utiliser les fonctions ci-dessus pour écrire une fonction `scilab` :

   `function [B, c] = calcule(A, M, b)`

   qui calcule $B = A^{-1}M$ et $c = A^{-1}b$.