MT09-A2021 – Examen final – Questions de cours

Durée : **30 mn**.

Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n^o :

ATTENTION, il y a 2 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 3,5 points)* Soit un réel a. On considère le sytème $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a & 0 \\ a & -4 & a \\ 0 & a & -2 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est d'approcher le système linéaire $Ax = b$ par un algorithme itératif de type

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n.$$

1. On suppose que M est inversible, écrire l'algorithme sous la forme
$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d.$$
Donner une condition sur C suffisante pour la convergence. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

2. On rappelle que $A = M - N$. On pose $M = -4I_3$, où I_3 est la matrice identité sur $\mathbb{R}^3$. Calculer N. Calculer les coefficients de C et les coefficients du vecteur d.

3. Donner $|||C|||_1$. En déduire que l'algorithme converge si $|a| < 2$.

4. Dans ce cas, les algorithmes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent-t-ils? Réponse par oui ou non. Une courte justification est la bienvenue. Aucune preuve longue n'est attendue!

Exercice 2 *(barème approximatif : 5 points)*

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

<u>On suppose que le rang A vaut n et que $b \notin \operatorname{Im} A$</u>.

1. La famille des vecteurs colonnes $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset \mathbb{R}^m$ est elle libre? En déduire que $m \geq n$. Donner en justifiant $\operatorname{Ker} A$.

2. On note $\hat{b}$ le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im} A$; donc $r = (b - \hat{b})$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$. Prouver que $r \in \operatorname{Ker} A^T$.

3. L'équation $A\hat{x} = \hat{b}$ admet-elle une solution? Donner une solution de l'équation normale $A^T Ax = A^T b$. Est-elle unique? Justifier vos réponses!

4. Calculer $\|A\hat{x} - b\|_2$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$, exprimer $\|Ay - b\|_2^2$, en utilisant l'orthogonalité, en fonction de $(Ay - \hat{b})$ et de r. En déduire que $\hat{x}$ est l'unique solution de $Ax = b$ au sens des moindres carrés.

MT09-A2021- Examen final
Durée : **1h.**
Polycopiés de cours et scilab autorisés – pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *8 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 7 points)*
CHANGEZ DE COPIE

On se donne le problème de Cauchy pour l'équation différentielle de Bernouilli

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t)^2 &= 0, \qquad \forall t > 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

L'objectif est d'analyser le schéma d'Euler explicite pour ce problème différentiel :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n - h(z_n)^2 = z_n(1 - hz_n), \qquad \forall n \geq 0 \\ z_0 &= 1. \end{aligned}$$

On adopte les notations habituelles : h est le pas de temps et $t_n = nh$. <u>On suppose dans toute la suite que $h < 1$</u>.

1. Poser $u(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ et résoudre le problème (1). La solution est $y(t) = \dfrac{1}{t+1}$.
   — Nous restons dans le cadre de cette solution, sauf à la dernière question.
2. Calculer z_1 et z_2. Montrer par récurrence que $z_n = P_n(h)$, où P_n est un polynôme de degré $(2^n - 1)$ avec $P_n(0) = 1$ et le coefficient de h^{2^n-1} est -1([1]) .
3. Montrer (par récurrence) que $z_n \in [0, 1]$. Vérifier que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et qu'elle est convergente vers une limite qu'on note $z \geq 0$.
4. Dans le cas où h est fixe, calculer la limite z_∞. Quelle stabilité avons nous établi?
5. On pose
   $$\tau_h(t) = y(t + h) - y(t) + hy(t)^2.$$
   Qu'appelle-t-on τ_h? Dans le cas de la solution calculée ci-dessus, prouver que
   $$|\tau_h(t)| \leq \frac{h^2}{(t+1)^3}.$$
   Quel est l'ordre du schéma?
6. Soit $t > 0$ un temps donné et on fixe dans cette question $k \geq 1$ et h_k tels que $t = t_k = kh_k$. On pose $e_n = y(t_n) - z_n$ pour $n \leq k$, (rappelons que $t_n = nh_k$). Donner l'expression de e_n en fonction de e_{n-1} et $\tau_h(t_{n-1})$. En déduire que
   $$|e_n| \leq (1 + 2h_k)|e_{n-1}| + (h_k)^2.$$
7. On admet alors que :
   $$|e_k| \leq (1 + 2h_k)^k |e_0| + (h_k)^2 \sum_{0 \leq n \leq k-1} (1 + 2h_k)^n.$$
   Que vaut e_0? Montrer que e_k tend vers 0 lorsque k croît vers $+\infty$ (et donc h_k décroît vers 0).

---

[1] *— On ne demande pas de calculer tous les coefficients. C'est dur!*

8. Donner la limite z_t de la suite $(P_k(\frac{t}{k}))_{k\geq 0}$ et expliquer pourquoi il existe une constante C qui ne dépend que de t telle que
$$\left| P_k\left(\frac{t}{k}\right) - z_t \right| \leq C\frac{t}{k}.$$

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)*
CHANGEZ DE COPIE

Soient une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, et deux réels t_0 et $T > 0$. On veut résoudre le problème différentiel de dimension 2 suivant :

$$\begin{aligned} Y'(t) + A(Y.*Y) &= 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ Y(t_0) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{2}$$

avec un schéma d'Euler implicite. Le symbole ".$*$" désigne le produit (de Hadamard) terme à terme des matrices. C'est-à-dire que
$$Y.*Y = \begin{bmatrix} (y_1)^2 \\ (y_2)^2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il faut résoudre à chaque pas de temps une équation du type :
$$X^\star = b + hF(t, X^\star). \tag{3}$$
Bien expliciter ce que valent b, h, t, F et $X^\star$.

2. Écrire une fonction `Scilab`
`[X] = ptfixe(Y0, Kmax, tol, b, h, t, F)`
qui implémente le point fixe correspondant à l'équation (3).

3. Écrire une fonction `Scilab`
`[X] = eulerimpl(X0, N, t0, T, F)`
qui implémente le schéma d'Euler implicite. Elle appellera la fonction `ptfixe` définie ci-dessus.

4. Écrire une fonction `Scilab`
`[Y] = funF(theta, X)`
qui sera appelée par le schéma d'Euler implicite `eulerimpl` pour résoudre l'équation différentielle (2).

Exercice 3 : *(barème approximatif : 4 points)*
CHANGEZ DE COPIE

On rappelle que f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On définit trois réels $x_0 = 0$ et $x_{-1} = -x_1$.

1. Donner la base d'interpolation (de Lagrange) L_{-1}, L_0, L_1 pour les points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$.

2. Soit f une fonction continue et <u>paire</u> sur $\mathbb{R}$.

   (a) Calculer le polynôme d'interpolation P de f aux points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$. Vérifier qu'il est pair.

   (b) Donner en un minimum de calculs le polynôme d'interpolation de $f(x) = 2(2 - x^4)$ aux points $\{-1, 0, 1\}$.

3. On suppose que f est impaire. Calculer son polynôme d'interpolation Q aux points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$. Qu'observez vous (parité, degré)?

4. Reprendre l'exemple de $f(x) = 2(2 - x^4)$, avec $x_1 = -1, x_0 = 0$ et $x_1 = 2$ (la symétrie des points est rompue). Le nouveau polynôme d'interpolation $\widetilde{P}$ obtenu est-il pair? Examiner aussi la parité du polynôme d'interpolation $\widetilde{Q}$ de $g(x) = x^3$. Commenter!