MT09-A2021 – Examen final – Questions de cours
Durée : **30 mn**.
Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION, il y a 2 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1

(barème approximatif : 3,5 points) Soit un réel a. On considère le sytème $Ax = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a & 0 \\ a & -4 & a \\ 0 & a & -2 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est d'approcher le système linéaire $Ax = b$ par un algorithme itératif de type

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n.$$

1. On suppose que M est inversible, écrire l'algorithme sous la forme

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d.$$

Donner une condition sur C suffisante pour la convergence. Donner une condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

Réponse : Comme M est inversible, on multiplie à gauche par M^{-1} pour obtenir l'algorithme sous la forme voulue avec : $C = M^{-1}N$ et $d = M^{-1}b$.

CS de convergence : il suffit qu'il existe une norme matricielle *subordonnée* $|||\cdot|||$ telle que $|||C||| < 1$.

CNS de convergence : il faut et il suffit que $\rho(C) < 1$.

□

2. On rappelle que $A = M - N$. On pose $M = -4I_3$, où I_3 est la matrice identité sur $\mathbb{R}^3$. Calculer N. Calculer les coefficients de C et les coefficients du vecteur d.

Réponse : Comme $M = -4I_3$, $M^{-1} = -\frac{1}{4}I_3$ et $C = -\frac{1}{4}N$. Comme $A = M - N$, $N = M - A$ et donc finalement :

$$N = \begin{pmatrix} -2 & -a & 0 \\ -a & 0 & -a \\ 0 & -a & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a}{4} & 0 \\ \frac{a}{4} & 0 & \frac{a}{4} \\ 0 & \frac{a}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \qquad d = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

□

3. Donner $|||C|||_1$. En déduire que l'algorithme converge si $|a| < 2$.

Réponse : Il vient

$$|||C|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| = \max\left\{\frac{1}{2} + \frac{|a|}{4}; \frac{|a|}{2}\right\}.$$

Donc si $|a| < 2$, $|||C|||_1 < 1$ et l'algorithme converge quel que soit le point initial $x^{(0)}$.

□

4. Dans ce cas, les algorithmes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent-t-ils? Réponse par oui ou non. Une courte justification est la bienvenue. Aucune preuve longue n'est attendue!

   Réponse : Si $|a| < 2$, on remarque que A est à diagonale strictement dominante et donc, d'après le cours, on sait que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent. $\square$

Exercice 2 *(barème approximatif : 5 points)*

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.
<u>On suppose que le rang A vaut n et que $b \notin \operatorname{Im} A$</u>.

1. La famille des vecteurs colonnes $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \subset \mathbb{R}^m$ est elle libre? En déduire que $m \geq n$. Donner en justifiant $\operatorname{Ker} A$.

   Réponse : Comme $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)) = n$, les n vecteurs colonnes de A forment une base de $\operatorname{Im}(A)$ et donc une famille libre de $\mathbb{R}^m$.

   Comme le nombre d'éléments d'une famille libre est au plus égal à la dimension de l'espace (= le nombre d'éléments d'une base), on a nécéssairement $n \leq m$.

   D'après le théorème du rang, il vient : $n = \dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rank}(A)$, on en déduit $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 0$ et donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$.

   $\square$

2. On note $\hat{b}$ le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im} A$; donc $r = (b - \hat{b})$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$. Prouver que $r \in \operatorname{Ker} A^T$.

   Réponse : Revoir la Section 3.2.2 du cours.

   D'après le cours (Prop. 3.2.5), on a : $\mathbb{R}^m = \operatorname{Im}(A) \oplus (\operatorname{Im}(A))^\perp$. Donc pour tout b, il existe un unique $\hat{b}$ dans $\operatorname{Im}(A)$ et un unique r dans $(\operatorname{Im}(A))^\perp$ tels que $b = \hat{b} + r$.

   Comme $r \in (\operatorname{Im}(A))^\perp$, il vient (cf. Prop. 3.2.6)

$$
\begin{aligned}
r \in (\operatorname{Im}(A))^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad r^T y = 0,\ \forall y \in \operatorname{Im}(A), \\
&\Leftrightarrow \quad r^T (Az) = 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^n, \\
&\Leftrightarrow \quad (A^T r)^T z = 0, \forall z \in \mathbb{R}^n, \\
&\Leftrightarrow \quad A^T r = 0,
\end{aligned}
$$

   car on peut prendre $z = A^T r \in \mathbb{R}^n$ et ainsi obtenir $\|A^T r\|_2^2 = 0$ (c'est comme cela qu'on montre que $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$). Donc $r \in \operatorname{Ker}(A^T)$ $\square$

3. L'équation $A\hat{x} = \hat{b}$ admet-elle une solution? Donner une solution de l'équation normale $A^T A x = A^T b$. Est-elle unique? Justifier vos réponses!

   Réponse : Revoir le cours!

   Comme $\hat{b} \in \operatorname{Im}(A)$, il existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\hat{x} = \hat{b}$. Ce $\hat{x}$ n'est pas nécessairement unique.

   On mutliplie cette équation à gauche par A^T pour obtenir : $A^T A\hat{x} = A^T \hat{b} = A^T(b-r) = A^T b$, car $r \in \operatorname{Ker}(A^T)$. Donc $\hat{x}$ est une solution des équations normales.

   Comme $\operatorname{Ker}(A^T A) = \operatorname{Ker}(A)$ (exercice classique à redémontrer), on obtient d'après la question 1) que $\operatorname{Ker}(A^T A) = \{0\}$, et donc $A^T A$, carrée, est inversible, et on en déduit que $\hat{x}$ est unique (en fait l'injectivité de $A^T A$ suffit pour avoir l'unicité).

   $\square$

4. Calculer $\|A\hat{x}-b\|_2$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$, exprimer $\|Ay-b\|_2^2$, en utilisant l'orthogonalité, en fonction de $(Ay-\hat{b})$ et de r. En déduire que $\hat{x}$ est l'unique solution de $Ax=b$ au sens des moindres carrés.

   Réponse : On a : $\|A\hat{x}-b\|_2 = \|\hat{b}-b\|_2 = \|-r\|_2 = \|r\|_2$**.**

   De plus, $\forall y \in \mathbb{R}^n$**, il vient**

$$\begin{aligned} \|Ay-b\|_2^2 &= \|Ay-(\hat{b}+r)\|_2^2 = \|(Ay-\hat{b})+r\|_2^2 \\ &= \|Ay-\hat{b}\|_2^2 + \left\langle Ay-\hat{b},\, r \right\rangle + \|r\|_2^2 \\ &= \|Ay-\hat{b}\|_2^2 + \|r\|_2^2, \end{aligned}$$

   car Ay **et** $\hat{b}$ **appartiennent à** $\mathrm{Im}(A)$ **et donc** $(Ay-\hat{b})$ **aussi, et** r **est dans** $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}$**.**

   Comme $\|Ay-\hat{b}\|_2^2 \geq 0$**, on en déduit que :**

$$\|r\|_2 = \|A\hat{x}-b\|_2^2 \leq \|Ay-b\|_2^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

   et donc $\hat{x}$ **est l'unique solution du problème de moindres carrés :**

$$\textbf{trouver } \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n \textbf{ tel que : } \|A\widetilde{x}-b\|_2^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay-b\|_2^2.$$

□

MT09-A2021- Examen final

Durée : **1h**.

Polycopiés de cours et scilab autorisés – pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *8 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 7 points)*
CHANGEZ DE COPIE

On se donne le problème de Cauchy pour l'équation différentielle de Bernouilli

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t)^2 = 0, \qquad \forall t > 0 \\ y(0) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

L'objectif est d'analyser le schéma d'Euler explicite pour ce problème différentiel :

$$\begin{aligned} z_{n+1} = z_n - h(z_n)^2 = z_n(1 - hz_n), \qquad \forall n \geq 0 \\ z_0 = 1. \end{aligned}$$

On adopte les notations habituelles : h est le pas de temps et $t_n = nh$.
On suppose dans toute la suite que $h < 1$.

1. Poser $u(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ et résoudre le problème (1). La solution est $y(t) = \dfrac{1}{t+1}$.
   — *Nous restons dans le cadre de cette solution, sauf à la dernière question.*

   Réponse :

   On suppose que $y(t) \neq 0$. Il vient alors $u'(t) = -\dfrac{y'(t)}{y(t)^2} = 1$, et donc $u(t) = t + C$, et la constante C vaut 1 d'après la condition initiale $u(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$. On en conclut que $y(t) = \frac{1}{1+t}$.

   On a travaillé par implications. On doit vérifier : $y > 0$ et y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $t > 0$, $y(0) = 1$ et $y'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} = -y(t)^2$. Donc y est bien solution de l'équation différentielle.

   □

2. Calculer z_1 et z_2. Montrer par récurrence que $z_n = P_n(h)$, où P_n est un polynôme de degré $(2^n - 1)$ avec $P_n(0) = 1$ et le coefficient de h^{2^n-1} est -1([1]) .

   Réponse : on calcule z_0, z_1, z_2, et on obtient :

   $$\begin{aligned} P_0(h) &= 1, \\ P_1(h) &= z_0(1 - hz_0) = 1 - h, \\ P_2(h) &= z_0(1 - hz_0)(1 - hz_0(1 - hz_0)) = (1 - h)(1 - h(1 - h)) = 1 - 2h + 2h^2 - h^3. \end{aligned}$$

   On remarque que l'on a bien pour $n = 0, 1, 2$: $\deg(P_n) = 2^n - 1$, $P_n(0) = 1$ et le coefficient de h^{2^n-1} vaut -1. Ce coefficient devant le terme de plus haut degré est appelé le coefficient directeur du polynôme.

[1] — *On ne demande pas de calculer tous les coefficients. C'est dur!*

On fait une récurrence en supposant ces trois hypothèses vraies pour P_n. Alors

$$P_{n+1}(h) = z_n(1 - hz_n) = P_n(h) - h(P_n(h))^2. \tag{2}$$

Ce polynôme est de degré : $\deg(P_{n+1}) = 2\deg(P_n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$**. De plus** $P_{n+1}(0) = 1$ **car** $P_n(0) = 1$**. Enfin le terme devant** $h^{2^{n+1}-1}$ **est le coefficient directeur de** $-h(P_n(h))^2$**. C'est donc le carré de celui de** P_n **(ce quii vaut** $(-1)^2 = 1$**), multiplié par** -1**. Donc il vaut** -1**. Ceci achève la récurrence.** □

3. Montrer (par récurrence) que $z_n \in [0, 1]$. Vérifier que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et qu'elle est convergente vers une limite qu'on note $z \geq 0$.

   Réponse : si $0 < h < 1$**, on obtient immédiatement que** z_0 **et** z_1 **sont dans** $[0, 1]$ **et que** $0 \leq z_1 \leq z_0 \leq 1$**.**

   On suppose que l'on a $0 \leq z_n \leq z_{n-1} \leq 1$**, pour** $n \geq 1$**. Alors, comme** $z_n \in [0, 1]$**, on obtient :** $0 < 1 - h \leq 1 - hz_n \leq 1$**. Donc en mulipliant par** $z_n \geq 0$**,**

   $$0 \leq z_n(1 - h) \leq z_{n+1} \leq z_n \leq 1.$$

   Ceci conclut la récurrence et on obtient donc que la suite reste dans $[0, 1]$ **et est décroissante.**

   Une suite minorée et décroissante est convergente. On déduit que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ **est convergente vers une limite** $z \in [0, 1]$**.**

   □

4. Dans le cas où h est fixe, calculer la limite z_∞. Quelle stabilité avons nous établi?

   Réponse : quand h **est fixe, la suite** $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers** $z = z_\infty \in [0, 1]$**.**

   Par continuité, en utilisant le schéma, on obtient à la limite (car $h > 0$ **est fixé)**

   $$z_\infty = z_\infty - hz_\infty^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = -hz_\infty^2,$$

   et donc

   $$\lim_{n\to\infty, h \text{ **fixé**}} z_n = z_\infty = 0 = \lim_{t\to\infty} y(t).$$

   La suite tend vers 0 **(comme la solution** $y(t)$**) pour les temps longs (**$t \to \infty$**). Le schéma est donc absolument stable.**

   □

5. On pose

   $$\tau_h(t) = y(t + h) - y(t) + hy(t)^2.$$

   Qu'appelle-t-on τ_h? Dans le cas de la solution calculée ci-dessus, prouver que

   $$|\tau_h(t)| \leq \frac{h^2}{(t + 1)^3}.$$

   Quel est l'ordre du schéma?

   Réponse : Le $\tau_h(t)$ **est l'erreur de troncature locale. Il vient en effet :**

   $$\tau_h(t) \quad = \quad y(t + h) - (y(t) + hy'(t)) = y(t + h) - \tilde{z}_{n+1},$$

   où $\tilde{z}_{n+1} = y(t_n) + hy'(t_n) = y(t_n) - hy(t_n)^2$ **est un pas du schéma (d'Euler explicite) en partant de la solution** $y(t)$ **(en supposant que** $t = t_n$**).**

On peut faire un développement de Taylor de y (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$). Il existe $\xi \in [t, t+h]$ dépendant de t et h tel que :

$$y(t+h) \quad = \quad y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi),$$

donc

$$\begin{aligned} |\tau_h(t)| &= \frac{1}{2}h^2|y''(\xi)| \\ &= \frac{h^2}{(1+\xi)^3} \leq \frac{h^2}{(1+t)^3} \end{aligned}$$

car $t \leq \xi$.

Donc le schéma est d'ordre 1 (c'est consistant avec le résultat général du cours appliqué à un y particulier ici).

Du fait de la forme spécifique de la solution, on aurait pu aussi écrire (après quelques calculs)

$$\begin{aligned} \tau_h(t) &= \frac{1}{1+t+h} - \frac{1}{1+t} + \frac{h}{(1+t)^2} \\ &= \frac{h^2}{(t+1)^2(t+h+1)}, \qquad \textbf{donc } (h > 0) \\ 0 \leq \tau_h(t) &\leq \frac{h^2}{(t+1)^3}, \end{aligned}$$

et obtenir le même résultat. □

6. Soit $t > 0$ un temps donné et on fixe dans cette question $k \geq 1$ et h_k tels que $t = t_k = kh_k$. On pose $e_n = y(t_n) - z_n$ pour $n \leq k$, (rappelons que $t_n = nh_k$). Donner l'expression de e_n en fonction de e_{n-1} et $\tau_h(t_{n-1})$. En déduire que

$$|e_n| \leq (1 + 2h_k)|e_{n-1}| + (h_k)^2.$$

Réponse : Cette fois-ci, on fixe t et on va faire tendre h_k vers 0 et k vers l'infini (de telle sorte que $t = kh_k$ reste fixe).

Pour le moment, k est fixe et on écrit pour $n = 1, \ldots, k$ l'erreur e_n,

$$\begin{aligned} e_n &= y(t_n) - z_n = (y(t_n) - \tilde{z}_n) + (\tilde{z}_n - z_n) \\ &= \tau_{h_k}(t_{n-1}) + \big(y(t_{n-1}) - h_k y(t_{n-1})^2 - z_{n-1} + h_k z_{n-1}^2\big) \\ &= \tau_{h_k}(t_{n-1}) + \big(y(t_{n-1}) - z_{n-1}\big) - h_k\big(y(t_{n-1})^2 - z_{n-1}^2\big) \\ &= \tau_{h_k}(t_{n-1}) + e_{n-1} - h_k e_{n-1}\big(y(t_{n-1}) + z_{n-1}\big). \end{aligned}$$

On peut alors majorer en utilisant la question précédente et le fait que $z_n \in [0,1]$, que $y(t) \in [0,1]$ et que $\frac{1}{(1+t)^3} \leq 1$,

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq |\tau_h(t_{n-1})| + |e_{n-1}|\big(1 + h_k(|y(t_{n-1})| + |z_{n-1}|)\big) \\ &\leq (h_k)^2 + |e_{n-1}|\big(1 + 2h_k\big), \qquad \forall n = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

□

7. On admet alors que :

$$|e_k| \le (1+2h_k)^k |e_0| + (h_k)^2 \sum_{0\le n\le k-1} (1+2h_k)^n.$$

Que vaut e_0? Montrer que e_k tend vers 0 lorsque k croît vers $+\infty$ (et donc h_k décroît vers 0).

Réponse : On montre par récurrence sur n l'inéquation (ce n'est pas demandé) :

$$\forall n = 1, \dots, k \quad : \qquad |e_n| \le (1+2h_k)^n |e_0| + (h_k)^2 \sum_{0\le i\le n-1} (1+2h_k)^i.$$

Elle est vraie pour $n=1$: $|e_1| \le (1+2h_k)^1|e_0| + (h_k)^2 \sum_{0\le i\le 0}(1+2h_k)^i = (1+2h_k)|e_0| + (h_k)^2$ (cf. question précédente).

On la suppose vraie pour n. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\le (h_k)^2 + |e_n|\big(1+2h_k\big) \\
&\le (h_k)^2 + \left[(1+2h_k)^n|e_0| + (h_k)^2 \sum_{0\le i\le n-1}(1+2h_k)^i\right]\big(1+2h_k\big) \\
&\le (1+2h_k)^{n+1}|e_0| + (h_k)^2\left[1 + \sum_{0\le i\le n-1}(1+2h_k)^{i+1}\right] \\
&\le (1+2h_k)^{n+1}|e_0| + (h_k)^2\left[\sum_{0\le j\le n}(1+2h_k)^j\right],
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

On répond maintenant à la question posée : $e_0 = y(0) - z_0 = 1 - 1 = 0$. Donc

$$|e_k| \le (h_k)^2 \sum_{0\le n\le k-1} (1+2h_k)^n.$$

On peut majorer pour $n = 0, \dots, k-1$ le terme :

$$\begin{aligned}
(1+2h_k)^n &\le (1+2h_k)^k = \exp(k\ln(1+2h_k)) \\
&\le \exp(k\left[2h_k - \frac{1}{2}4h_k^2 + o(h_k^2)\right]) = \exp(2t - 2th_k + o(h_k)),
\end{aligned}$$

car $kh_k = t$. Il vient alors

$$|e_k| \le h_k(h_k k)(1+2h_k)^k = h_k t \exp(2t - 2th_k + o(h_k))$$

Donc l'erreur e_k tend vers 0 en $O(h^k)$. On retrouve dans ce cas particulier la convergence à l'ordre 1 du schéma d'Euler explicite, qui est montrée en cours dans le cas général.

□

8. Donner la limite z_t de la suite $(P_k(\frac{t}{k}))_{k\ge 0}$ et expliquer pourquoi il existe une constante C qui ne dépend que de t telle que

$$\left|P_k\left(\frac{t}{k}\right) - z_t\right| \le C\frac{t}{k}.$$

Réponse : Comme le schéma d'Euler explicite converge à l'ordre 1 (cf. question précédente), on obtient que $y(t) = y(t_k) = \lim_{k\to\infty, h_k\to 0, t=h_k k \text{ fixé}} z_k = z_t$ **et** $z_k = P_k(h_k) = P_k(\frac{t}{k})$**. Il vient donc**

$$|-e_k| = |z_k - y(t_k)| = \left| P_k\left(\frac{t}{k}\right) - z_t \right| \leq C\frac{t}{k}.$$

□

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)*
CHANGEZ DE COPIE

Soient une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, et deux réels t_0 et $T > 0$. On veut résoudre le problème différentiel de dimension 2 suivant :

$$\begin{aligned} Y'(t) + A(Y.*Y) &= 0, \qquad \forall t \in [t_0, t_0+T] \\ Y(t_0) &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{3}$$

avec un schéma d'Euler implicite. Le symbole ".∗" désigne le produit (de Hadamard) terme à terme des matrices. C'est-à-dire que

$$Y.*Y = \begin{bmatrix} (y_1)^2 \\ (y_2)^2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il faut résoudre à chaque pas de temps une équation du type :

$$X^\star = b + hF(t, X^\star). \tag{4}$$

Bien expliciter ce que valent b, h, t, F et $X^\star$.

Réponse : Le schéma d'Euler implicite s'écrit $z_{n+1} = z_n + hF(t_{n+1}, z_{n+1})$**. Il faut donc calculer** z_{n+1} **à chaque pas de temps en résolvant cette équation non-linéaire. Les notations sont donc :** $b = z_n$, $h =$ **le pas de temps,** $t = t_{n+1}$, F**= la fonction de l'équation différentielle et** $X^\star = z_{n+1}$**.**

Dans ce cas, F **est la fonction sur** $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**, définie par** $(\theta, X) \mapsto F(\theta, X) = A(Y.*Y)$**.** □

2. Écrire une fonction `Scilab`
`[X] = ptfixe(Y0, Kmax, tol, b, h, t, F)`
qui implémente le point fixe correspondant à l'équation (4).

Réponse : La fonction g **de point fixe est définie par** (4)**. Une implémentation possible est :**

```
function [X, k, res] = ptfixe(Y0, Kmax, tol, b, h, t, F)
// point fixe pour la resolution de theta methode:  Zn+1 = Zn + h * F(tn+1,Zn+1)
p = length(Y0); Yk = Y0(:);
X = zeros(p, 1);
for k = 1:Kmax
     X = b + h * F(t, Yk)
     res = norm(X - Yk);
     if res < tol
         return
     else
```

```
        Yk = X;
    end
end
msg_warn = sprintf("Pas de convergence en Kmax=%d iterations, residual=%g", k, res)
warning(msg_warn)
endfunction
```

□

3. Écrire une fonction `Scilab`
   `[X] = eulerimpl(X0, N, t0, T, F)`
   qui implémente le schéma d'Euler implicite. Elle appellera la fonction `ptfixe` définie ci-dessus.

   Réponse : Une implémentation possible est :

```
function [X, k, res] = eulerimpl(X0, N, t0, T, F)
exec("ptfixe.sci",-1);
p = length(X0); X = zeros(p, N+1); Xn = zeros(p, 1);
res = zeros(1, N); k = zeros(1, N);
Kmax = 500; tol = 1e-10; // exemple de valeurs possibles
h = T / N;
// initialisation :
X(:, 1) = X0; tn = linspace(t0, t0+T, N+1);
for iter = 1:N
    Xn = X(:, iter);
    [X(:, iter+1), k(iter), res(iter)] = ...
          ptfixe(Xn, Kmax, tol, Xn, h, tn(iter+1), F);
end
endfunction
```

   On stocke le nombre d'itérations de point fixe ainsi que la valeur des résidus. Comme point de départ de la méthode de point fixe, on prend X_n. □

4. Écrire une fonction `Scilab`
   `[Y] = funF(theta, X)`
   qui sera appelée par le schéma d'Euler implicite `eulerimpl` pour résoudre l'équation différentielle (3).

   Réponse :

   Une implémentation possible est :

```
function [Y] = funF(theta, X)
A = [2 1; 1 2]; // par exemple
Y = A * (X .* X); endfunction
```

   Note : cette fonction ne dépend pas de θ. □

Exercice 3 : *(barème approximatif : 4 points)*
CHANGEZ DE COPIE

On rappelle que f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On définit trois réels $x_0 = 0$ et $x_{-1} = -x_1$.

1. Donner la base d'interpolation (de Lagrange) L_{-1}, L_0, L_1 pour les points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$.

   Réponse : On pose $h = x_0 - x_{-1} = x_1 - x_0$. On obtient :

$$\begin{aligned} L_{-1}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)} = \frac{x(x-x_1)}{2h^2} \\ L_0(x) &= \frac{(x-x_{-1})(x-x_1)}{(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)} = \frac{(x-x_{-1})(x-x_1)}{-h^2} = \frac{(x^2-x_1^2)}{-h^2} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_{-1})} = \frac{x(x-x_{-1})}{2h^2} = \frac{x(x+x_1)}{2h^2}. \end{aligned}$$

$\square$

2. Soit f une fonction continue et <u>paire</u> sur $\mathbb{R}$.

   (a) Calculer le polynôme d'interpolation P de f aux points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$. Vérifier qu'il est pair.
   Réponse : Comme $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) et que $f(x_{-1}) = f(-x_1) = f(x_1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_{-1})L_{-1}(x) + f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) \\ &= f(x_1)\big(L_1(x) + L_{-1}(x)\big) + f(x_0)L_0(x). \end{aligned}$$

De plus, comme

$$\begin{aligned} L_{-1}(-x) &= \frac{-x(-x-x_1)}{2h^2} = L_1(x) \\ L_0(-x) &= L_0(x) \\ L_1(-x) &= L_{-1}(x), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} P(-x) &= f(x_1)\big(L_1(-x) + L_{-1}(-x)\big) + f(x_0)L_0(-x) \\ &= f(x_1)\big(L_{-1}(x) + L_1(x)\big) + f(x_0)L_0(x) \\ &= P(x), \end{aligned}$$

donc P est pair.
On pouvait noter également que

$$L_1(x) + L_{-1}(x) = \frac{x(x+x_1+x-x_1)}{2h^2} = \frac{x^2}{h^2}$$

est paire. Donc P est paire comme somme de deux fonctions paires ($(L_1 + L_{-1})$ et L_0) et s'écrit précisément

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_1)\frac{x^2}{h^2} + f(x_0)\frac{(x^2-x_1^2)}{-h^2} \\ &= \frac{1}{h^2}\left(f(x_0)x_1^2 + x^2(f(x_1) - f(x_0))\right). \end{aligned}$$

$\square$

(b) Donner en un minimum de calculs le polynôme d'interpolation de $f(x) = 2(2 - x^4)$ aux points $\{-1, 0, 1\}$.

Réponse :

Dans ce cas, $h = 1$. La fonction f est paire et $f(0) = 4, f(-1) = f(1) = 2$. D'après la question précédente, on obtient :

$$P = 2(L_{-1} + L_1) + 4L_0 = 2x^2 - 4(x^2 - 1) = 4 - 2x^2.$$

□

3. On suppose que f est impaire. Calculer son polynôme d'interpolation Q aux points $\{x_{-1}, x_0, x_1\}$. Qu'observez vous (parité, degré)?

Réponse : Comme on a cette fois-ci, $f(x_{-1}) = f(-x_1) = -f(x_1)$ et $f(x_0) = f(0) = 0$, on obtient :

$$Q(x) = f(x_1)\big(L_1(x) - L_{-1}(x)\big)$$

et

$$L_1(x) - L_{-1}(x) = \frac{x(x + x_1 - x + x_1)}{2h^2} = \frac{x_1 x}{h^2}$$

est impaire. Donc Q est impaire et de degré 1 (et non deux, ce qui était attendu *a priori).* □

4. Reprendre l'exemple de $f(x) = 2(2 - x^4)$, avec $x_1 = -1, x_0 = 0$ et $x_1 = 2$ (la symétrie des points est rompue). Le nouveau polynôme d'interpolation $\widetilde{P}$ obtenu est-il pair? Examiner aussi la parité du polynôme d'interpolation $\widetilde{Q}$ de $g(x) = x^3$. Commenter!

Réponse :

comme $f(-1) = 2, f(0) = 4, f(2) = -28$, et comme $g(-1) = -1, g(0) = 0, g(2) = 8$, on trouve dans ce cas les polynômes dans la base de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{-1}(x) &= \frac{x(x-2)}{3} = \frac{1}{3}(-2x + x^2), \\
\tilde{L}_0(x) &= \frac{(x+1)(x-2)}{-2} = \frac{1}{2}(2 + x - x^2) \\
\tilde{L}_2(x) &= \frac{x(x+1)}{6} = \frac{1}{6}(x + x^2),
\end{aligned}$$

et donc les polynômes d'interpolation valent

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x) &= 2\tilde{L}_{-1}(x) + 4\tilde{L}_0(x) - 28\tilde{L}_2(x) \\
&= 4 - 4x - 6x^2, \\
\widetilde{Q}(x) &= -1\tilde{L}_{-1}(x) + 8\tilde{L}_2(x) \\
&= 2x + x^2.
\end{aligned}$$

On observe que $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ ne sont toutes les deux ni paires ni impaires. Les propriétés de parité sont rompues quand les points ne sont pas disposés de façon symétrique par rapport à 0. □