Chapitre 2 : Applications linéaires et matrices

Antoine Zurek – Vincent Martin

LMAC - UTC

1. Applications linéaires
2. Matrices
3. Théorème du rang: matriciellement

Sommaire

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E, F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \to F$ une application vérifiant :

- $u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$,
- $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E, F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \to F$ une application vérifiant :

- $u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$,
- $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples : linéaire ou pas ?

- $u \equiv 0$ (application identiquement nulle),
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $u(x) = exp(x)$,
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$,
- $u_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$,
- $u_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3)$.

Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre E, F et G désignent des e.v. sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire $u : E \to F$ une application vérifiant :

- $u(x+y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$,
- $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples : linéaire ou pas ?

- $u \equiv 0$ (application identiquement nulle), oui,
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $u(x) = exp(x)$, non,
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$, non,
- $u_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$, oui,
- $u_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ avec $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3)$, oui.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on définit pour tout $\lambda \in K$ la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 2. Cette opération est une loi externe pour $\mathcal{L}(E, F)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.

On considère u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 1. $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$ possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on définit pour tout $\lambda \in K$ la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

Fait 2. Cette opération est une loi externe pour $\mathcal{L}(E, F)$.

Conclusion : $\mathcal{L}(E, F)$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
On notera plus simplement dans la suite $\hat{+}$ par $+$.

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$.

En effet, on considère x et y dans E. Alors on a

$$(u \circ v)(x + y) = u(v(x + y)) = u(\underbrace{v(x) + v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où $(u \circ v)(x + y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$ pour tout x et y dans E.

Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si $v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E,G)$.

En effet, on considère x et y dans E. Alors on a

$$(u \circ v)(x+y) = u(v(x+y)) = u(\underbrace{v(x)+v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où $(u \circ v)(x+y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$ pour tout x et y dans E.

De plus pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$ on a

$$(u \circ v)(\lambda x) = u(v(\lambda x)) = u(\underbrace{\lambda}_{\in K} \underbrace{v(x)}_{\in F}) = \lambda u(v(x)).$$

D'ou $(u \circ v)(\lambda x) = \lambda (u \circ v)(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$.

Noyau

Si u est une application linéaire de E dans F ($\mathbb{R}$ e.v.) alors on a toujours $u(0_E) = 0_F$. En effet $u(0_E) = u(0_\mathbb{R} \cdot x) = 0_\mathbb{R}\, u(x) = 0_F$.

Question. Peut-on avoir $x \neq 0_E$ et pourtant $u(x) = 0_F$?

Noyau

Si u est une application linéaire de E dans F ($\mathbb{R}$ e.v.), alors on a toujours $u(0_E) = 0_F$. En effet $u(0_E) = u(0_\mathbb{R} \cdot x) = 0_\mathbb{R}\, u(x) = 0_F$.

Question. Peut-on avoir $x \neq 0_E$ et pourtant $u(x) = 0_F$?
Oui ! Par exemple $u_2(1, 3, -2) = (1 + 9 - 10, 7 - 3 - 4) = (0, 0)$.

Définition 2.1.2.

Soit $f : E \to F$ une application. On appelle noyau de f, noté $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f) = \{x \in E \;:\; f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 2.1.1.

Si u est linéaire, alors $\ker(u)$ est un s.e.v. de E.

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$.
Calculer $\ker(u_3)$.

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si ... ?

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$.
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on peut lier l'injectivité de u et son noyau. En effet :

Théorème 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- u est injective,
- $\ker(u) = \{0_E\}$.

Injectivité et noyau

Rappel Une application u (entre deux ensembles E et F) est injective si $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$.
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on peut lier l'injectivité de u et son noyau. En effet :

Théorème 2.1.2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- u est injective,
- $\ker(u) = \{0_E\}$.

Attention ! Cette propriété est fausse si u n'est pas linéaire. En effet, pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $u(x) = x^2$ vérifie

$$\ker(u) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; u(x) = 0\} = \{0\}.$$

Or $u(2) = u(-2)$ donc u n'est pas injective...

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit f une application de E dans F. On appelle image de f, l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ et donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \,:\, \exists x \in E,\, y = f(x)\}.$$

Lemme. Si u est linéaire, $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de F (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$. Calculer $\mathrm{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $f : E \to F$ est surjective si

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit f une application de E dans F. On appelle image de f, l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ et donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \,:\, \exists x \in E,\, y = f(x)\}.$$

Lemme. Si u est linéaire, $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de F (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$. Calculer $\mathrm{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $f : E \to F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Image (et surjectivité)

Définition 2.1.2.

Soit f une application de E dans F. On appelle image de f, l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ et donné par

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \,:\, \exists x \in E,\, y = f(x)\}.$$

Lemme. Si u est linéaire, $\mathrm{Im}(u)$ est un s.e.v. de F (à démontrer en exercice).

Exemple. Soit $u_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$. Calculer $\mathrm{Im}(u_3)$.

Rappel. Une application $f : E \to F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Théorème 2.1.3.

Soit f une application de E dans F, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est surjective,
- $\mathrm{Im}(f) = F$.

Vocabulaire

- homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- isomorphisme : application linéaire bijective,
- automorphisme : endomorphisme $+$ isomorphisme,
- Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F.

Vocabulaire

- homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- isomorphisme : application linéaire bijective,
- automorphisme : endomorphisme $+$ isomorphisme,
- Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F.

Attention. Toute application linéaire entre E et F n'est pas un isomorphisme !

Vocabulaire

- homomorphisme : application linéaire (en gros $\mathcal{L}(E, F)$),
- endomorphisme : application linéaire de E dans E (en gros $\mathcal{L}(E, E)$ noté $\mathcal{L}(E)$),
- isomorphisme : application linéaire bijective,
- automorphisme : endomorphisme $+$ isomorphisme,
- Deux e.v. E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E dans F.

Attention. Toute application linéaire entre E et F n'est pas un isomorphisme !

Proposition 2.1.10.

- Si u est un isomorphisme, alors u^{-1} aussi.

Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorèmen 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- L'image d'une famille liée de E par u est une famille liée de F.
- Si u est injective, l'image d'une famille libre de E par u est une famille libre de F.
- L'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératice de $\mathrm{Im}(u)$.
- Si u est surjective, l'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de F.

Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorèmen 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- L'image d'une famille liée de E par u est une famille liée de F.
- Si u est injective, l'image d'une famille libre de E par u est une famille libre de F.
- L'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératice de $\mathrm{Im}(u)$.
- Si u est surjective, l'image d'une famille génératrice de E par u est une famille génératrice de F.

Corollaire (voir Proposition 2.1.8.)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est bijective ($\ker(u) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(u) = F$),
- l'image d'une base de E par u est une base de F.

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

(a) si $(e_1, \ldots, e_n)$ liée dans E, $\Rightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ liée dans F,

(b) si $(e_1, \ldots, e_n)$ libre $+$ u injective, $\Rightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ libre,

(c.1) si $(e_1, \ldots, e_n)$ génératrice de E,
$\Rightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ génératrice de $\mathrm{Im}(u)$,

(c.2) si u est surjective, $\Rightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ génératice de F.

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

(a) si $(e_1, \ldots, e_n)$ liée dans E, $\Rightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ liée dans F,

(b) si $(e_1, \ldots, e_n)$ libre $+$ u injective, $\Rightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ libre,

(c.1) si $(e_1, \ldots, e_n)$ génératrice de E,
$\Rightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ génératrice de $\mathrm{Im}(u)$,

(c.2) si u est surjective, $\Rightarrow$ $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ génératice de F.

Proposition 2.1.9.

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow$ $\dim(E) = \dim(F)$.

Résumé

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a montré que :

(a) si $(e_1, \dots, e_n)$ liée dans E, $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ liée dans F,

(b) si $(e_1, \dots, e_n)$ libre + u injective, $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ libre,

(c.1) si $(e_1, \dots, e_n)$ génératrice de E,
$\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ génératrice de $\mathrm{Im}(u)$,

(c.2) si u est surjective, $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$ génératice de F.

Proposition 2.1.9.

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$.

Questions :

(d) Si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de F est-ce que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératice de E ?

(e) Si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F est-ce que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E ?

Rang

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, i.e., $\mathrm{rang}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Rang

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, i.e., $\mathrm{rang}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Remarques. On a

- $\mathrm{rang}(u) \leq \dim(F)$ (car $\mathrm{Im}(u) \subset F$),
- $\mathrm{rang}(u) \leq \dim(E)$ (car l'image d'une base de E génère $\mathrm{Im}(u)$).

Théorème du rang

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rang}(u) = \dim(E)$.

Théorème du rang

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rang}(u) = \dim(E)$.

Proposition 2.2.15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est injective,
- u est surjecive,
- u est bijective.

Sommaire

Matrices

Définition.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ d'éléments du corps K. On représente la matrice sous la forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Matrices

Définition.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on appelle matrice de n lignes et p colonnes toute famille $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ d'éléments du corps K. On représente la matrice sous la forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.

Remarque. Dans la suite on notera plus simplement $\mathcal{M}_{n,p}$.

Vocabulaire (voir Définition 2.2.2.)

- Si $p = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}$ est appelée matrice colonne.
- Si $n = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}$ est appelée matrice ligne.
- Si $n = p$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ est appelée matrice carrée d'ordre n. On note plus simplement $\mathcal{M}_n$ cet ensemble.
- Si $n = p$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ la matrice est dite diagonale. De plus, on appelle matrice identité I_n la matrice vérifiant $a_{ii} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (avec $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ (et $n = p$), la matrice est dite triangulaire inférieure.
- Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (et $n = p$), la matrice est dite triangulaire supérieure.

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- la matrice somme $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\},$$

- la matrice produit $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}.$$

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- la matrice somme $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\},$$

- la matrice produit $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}.$$

Théorème.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un e.v. sur K. De plus $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$.

Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On définit

- la matrice somme $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ par

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\},$$

- la matrice produit $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ (avec $\lambda \in K$) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}.$$

Théorème.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un e.v. sur K. De plus $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$.

Question. Existence d'un lien entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(K)$?

Applications linéaires et matrices

Définition 2.2.1.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On associe à u une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ représentant u dans les bases E et F sous la forme :

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} u(e_1) & \quad & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{=A} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array}
\end{array}
$$

Applications linéaires et matrices

Définition 2.2.1.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On associe à u une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ représentant u dans les bases E et F sous la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{=A} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \end{array}$$

Conclusion. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement définie via son image des éléments de la base de E, i.e., u est entièrement définie par $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}.$$

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,q\}.$$

Attention ! Le produit AB de deux matrices A et B est possible si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !

Produit de matrices

Définition.

Soit $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On définit la matrice produit $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} \quad \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, q\}.$$

Attention ! Le produit AB de deux matrices A et B est possible si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !

Attention !! Le produit de matrices est associatif et distributif par rapport à la somme (voir Proposition 2.2.2.) Par contre le produit n'est pas commutatif !!

Produit de matrices et composition

Proposition (voir Définition 2.2.6.)

On considère :

- E un e.v. et $\mathcal{E}$ sa base,
- F un e.v. et $\mathcal{F}$ sa base,
- G un e.v. et $\mathcal{G}$ sa base,
- $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et B sa représentation matricielle dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,
- $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et A sa représentation matricielle dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$

Alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ admet pour matrice $C = AB$. Schématiquement on a :

$$E \xrightarrow[B]{v} F \xrightarrow[A]{u} G$$

$$E \xrightarrow[C=AB]{u \circ v} G$$

Vocabulaire (voir Définition 2.2.3.)

- Si $n = p$, on définit la trace de A par :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ sur K
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a $\mathrm{Tr}(A^\top) = \mathrm{Tr}(A)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Calcul explicite de l'image d'un vecteur

Proposition (voir Section 2.2.5.)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. On considère $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) = u(x) \in F$. Alors on peut obtenir les composantes $y_1, \ldots, y_n$ du vecteurs y dans la base $\mathcal{F}$ via l'opération matricielle :

$$Y = AX, \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

.

Matrice inverse

Définition 2.2.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. La matrice A est dite inversible si il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ telle que $AC = CA = I$. Si C existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Matrice inverse

Définition 2.2.7.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. La matrice A est dite inversible si il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ telle que $AC = CA = I$. Si C existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Proposition 2.2.4 et Proposition 2.2.5.

- Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$, alors AB est inversible et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme et A la matrice représentant u dans les bases de E et F. Alors A est inversible et A^{-1} est la matrice représentative de u^{-1} dans les bases de F et E.

Matrice transposée

Définition 2.2.8.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle transposée de A la matrice notée $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, i.e.,

$$\left(A^\top\right)_{ij} = a_{ji} \quad i = 1, \dots, p, \, j = 1, \dots, n.$$

Proposition 2.2.6.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,m}$, on a

$$\left(A^\top\right)^\top = A, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Définition 2.2.9.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

- A est dite symétrique si $A^\top = A$ ($a_{ij} = a_{ji}$),
- A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$ ($a_{ij} = -a_{ji}$).

Matrice de passage

Définition 2.2.10.

On considère $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ la matrice, notée $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}}_{=P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

Propriétés

Proposition 2.2.8.

On considère $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}}$.

Proposition 2.2.9.

Soit $Q \in \mathcal{M}_n$ et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit les vecteurs $e'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} e_i$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$(e'_1, \dots, e'_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow Q \text{ est inversible.}$$

Changement de bases et composantes d'un vecteur

Proposition 2.2.10.

On considère $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$, on note X et X' les matrices colonnes contenant les composantes de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Soit $P = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$ alors

$$\begin{aligned} X' = P^{-1}X \quad &\iff \quad X = PX', \\ X'_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}'\leftarrow\mathcal{E}}X_{\mathcal{E}} \quad &\iff \quad X_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}'}X'_{\mathcal{E}'}. \end{aligned}$$

Changement de bases et application linéaire

Théorème 2.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. On note A la matrice de u dans $\mathcal{E}$ ($A_{\mathcal{E}}$) et A' la matrice de u dans $\mathcal{E}'$ ($A_{\mathcal{E}'}$). Enfin soit $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$, alors

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1} A\, P, \\ A_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}'} &= P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}}\, A_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}\, P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}. \end{aligned}$$

Changement de bases et application linéaire

Théorème 2.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E. On note A la matrice de u dans $\mathcal{E}$ ($A_{\mathcal{E}}$) et A' la matrice de u dans $\mathcal{E}'$ ($A_{\mathcal{E}'}$). Enfin soit $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}$, alors

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1} A P, \\ A_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}'} &= P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}'}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.11.

S'il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, alors A et A' sont dites semblables.

Remarque. Les matrices associées au même endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables.

Proposition 2.2.11.

On considère A et $B \in \mathcal{M}_n$. Alors si A et B sont semblables,

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B).$$

Sommaire

1. Applications linéaires
2. Matrices
3. Théorème du rang: matriciellement

Rang (rappel)

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, i.e., $\mathrm{rang}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Rang (rappel)

Définition 2.2.12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle rang de u la dimension de $\operatorname{Im}(u)$, i.e., $\operatorname{rang}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$.

Remarques. On a

- $\operatorname{rang}(u) \leq \dim(F)$ (car $\operatorname{Im}(u) \subset F$),
- $\operatorname{rang}(u) \leq \dim(E)$ (car l'image d'une base de E génère $\operatorname{Im}(u)$).

Définition 2.2.13.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on appelle $\operatorname{Im}(A)$ le s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}$ défini par

$$Y \in \operatorname{Im}(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{p,1},\ Y = AX.$$

Proposition 2.2.12.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{vect}\langle A_1, \ldots, A_p \rangle$.

Définition 2.2.14.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, alors $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$.

Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

Proposition 2.2.13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si on choisit $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F et si on définit A la matrice associée à u. Alors

$$\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(A).$$

Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

Proposition 2.2.13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si on choisit $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F et si on définit A la matrice associée à u. Alors

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(A).$$

Proposition 2.2.14.

- Si A et A' sont semblables, alors elles ont le même rang.
- A et $A^\top$ ont le même rang.

Calcul pratique.

- Def 2.2.14 et Prop 2.2.14 $\Rightarrow$ calcul du nombre maximal de colonnes ou lignes linéairement indépendantes.
- Si $\text{rang}(u)$ connu alors $\text{rang}(A)$ également.

Théorème du rang (rappel)

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rang}(u) = \dim(E)$.

Théorème du rang (rappel)

Théorème 2.2.3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rang}(u) = \dim(E)$.

Proposition 2.2.15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si $\dim(E) = \dim(F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est injective,
- u est surjecive,
- u est bijective.

Noyau d'une matrice

Définition 2.2.15.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, on appelle noyau de A le s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,1}$, noté $\ker(A)$, défini par

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} \, : \, AX = 0\}.$$

Théorème 2.2.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = p = \text{nb colonnes de } A.$$

Proposition 2.2.16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ alors

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n.$$