

## Chapitre 2 : Applications linéaires et matrices

Antoine Zurek

LMAC - UTC

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

# Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

## Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des e.v. sur un même corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire  $u : E \rightarrow F$  une application vérifiant :

- ▶  $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E,$
- ▶  $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K.$

On notera  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

## Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des e.v. sur un même corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire  $u : E \rightarrow F$  une application vérifiant :

- ▶  $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$ ,
- ▶  $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$ .

On notera  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Exemples : linéaire ou pas ?

- ▶  $u \equiv 0$  (application identiquement nulle),
- ▶  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u(x) = \exp(x)$ ,
- ▶  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u(x) = x^2$ ,
- ▶  $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$ ,
- ▶  $u_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  
 $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3)$ .

## Application linéaire - définition

Dans tout ce chapitre  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des e.v. sur un même corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### Définition 2.1.1.

On appelle application linéaire  $u : E \rightarrow F$  une application vérifiant :

- ▶  $u(x + y) = u(x) + u(y) \quad \forall x, y \in E$ ,
- ▶  $u(\lambda x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K$ .

On notera  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Exemples : linéaire ou pas ?

- ▶  $u \equiv 0$  (application identiquement nulle), oui,
- ▶  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u(x) = \exp(x)$ , non,
- ▶  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u(x) = x^2$ , non,
- ▶  $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_1(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$ , oui,
- ▶  $u_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3, 7x_1 - x_2 + 2x_3)$ , oui.

$\mathcal{L}(E, F)$  est un e.v.

On considère  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(E, F)$ . On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

**Fait 1.**  $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$  possède une structure de groupe commutatif.

$\mathcal{L}(E, F)$  est un e.v.

On considère  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(E, F)$ . On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

**Fait 1.**  $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$  possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  on définit pour tout  $\lambda \in K$  la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

**Fait 2.** Cette opération est une loi externe pour  $\mathcal{L}(E, F)$ .

$\mathcal{L}(E, F)$  est un e.v.

On considère  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(E, F)$ . On peut définir la somme de ces deux applications par

$$(u \hat{+} v)(x) = u(x) + v(x) \quad \forall x \in E.$$

**Fait 1.**  $(\mathcal{L}(E, F), \hat{+})$  possède une structure de groupe commutatif.

De plus pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  on définit pour tout  $\lambda \in K$  la loi

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \quad \forall x \in E.$$

**Fait 2.** Cette opération est une loi externe pour  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{L}(E, F)$  muni de ces deux lois est un **espace vectoriel**.  
On notera plus simplement dans la suite  $\hat{+}$  par  $+$ .

## Composition d'applications linéaires

Proposition 2.1.3.

Si  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $u \in \mathcal{L}(F, G)$  alors  $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## Composition d'applications linéaires

### Proposition 2.1.3.

Si  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $u \in \mathcal{L}(F, G)$  alors  $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ .

En effet, on considère  $x$  et  $y$  dans  $E$ . Alors on a

$$(u \circ v)(x + y) = u(v(x + y)) = u(\underbrace{v(x) + v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où  $(u \circ v)(x + y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

## Composition d'applications linéaires

### Proposition 2.1.3.

Si  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $u \in \mathcal{L}(F, G)$  alors  $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$ .

En effet, on considère  $x$  et  $y$  dans  $E$ . Alors on a

$$(u \circ v)(x + y) = u(v(x + y)) = u(\underbrace{v(x) + v(y)}_{\in F}) = u(v(x)) + u(v(y)).$$

D'où  $(u \circ v)(x + y) = (u \circ v)(x) + (u \circ v)(y)$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

De plus pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in K$  on a

$$(u \circ v)(\lambda x) = u(v(\lambda x)) = u(\underbrace{\lambda}_{\in K} \underbrace{v(x)}_{\in F}) = \lambda u(v(x)).$$

D'où  $(u \circ v)(\lambda x) = \lambda(u \circ v)(x)$  pour tout  $x \in E$  et  $\lambda \in K$ .

# Noyau

Si  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  ( $\mathbb{R}$  e.v.) alors on a **toujours**  $u(0_E) = 0_F$ . En effet  $u(0_E) = u(0_{\mathbb{R}} \cdot x) = 0_{\mathbb{R}} u(x) = 0_F$ .

**Question.** Peut-on avoir  $x \neq 0_E$  et pourtant  $u(x) = 0_F$  ?

## Noyau

Si  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  ( $\mathbb{R}$  e.v.) alors on a **toujours**  $u(0_E) = 0_F$ . En effet  $u(0_E) = u(0_{\mathbb{R}} \cdot x) = 0_{\mathbb{R}} u(x) = 0_F$ .

**Question.** Peut-on avoir  $x \neq 0_E$  et pourtant  $u(x) = 0_F$  ?

Oui ! Par exemple  $u_2(1, 3, -2) = (1 + 9 - 10, 7 - 3 - 4) = (0, 0)$ .

### Définition 2.1.2.

Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. On appelle **noyau de  $u$** , noté  $\ker(u)$ , l'ensemble :

$$\ker(u) = \{x \in E : u(x) = 0_F\}.$$

### Proposition 2.1.1.

$\ker(u)$  est un **s.e.v. de  $E$** .

**Exemple.** Soit  $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$ .  
Calculer  $\ker(u_3)$ .

# Injectivité et noyau

**Rappel** Une application  $u$  (entre deux ensembles  $E$  et  $F$ ) est injective si ... ?

## Injectivité et noyau

**Rappel** Une application  $u$  (entre deux ensembles  $E$  et  $F$ ) est injective si  $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors on peut lier l'injectivité de  $u$  et son noyau. En effet :

### Théorème 2.1.2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶  $u$  est injective,
- ▶  $\ker(u) = \{0_E\}$ .

## Injectivité et noyau

**Rappel** Une application  $u$  (entre deux ensembles  $E$  et  $F$ ) est injective si  $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors on peut lier l'injectivité de  $u$  et son noyau. En effet :

### Théorème 2.1.2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶  $u$  est injective,
- ▶  $\ker(u) = \{0_E\}$ .

**Attention !** Cette propriété est fautive si  $u$  n'est pas linéaire. En effet, pour  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $u(x) = x^2$  vérifie

$$\ker(u) = \{x \in \mathbb{R} : u(x) = 0\} = \{0\}.$$

Or  $u(2) = u(-2)$  donc  $u$  n'est pas injective...

## Image (et surjectivité)

### Définition 2.1.2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle image de  $u$ , l'ensemble noté  $\text{Im}(u)$  et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

**Remarque.**  $\text{Im}(u)$  est un **s.e.v. de  $F$**  (à démontrer en exercice).

**Exemple.** Soit  $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$ .  
Calculer  $\text{Im}(u_3)$ .

**Rappel.** Une application  $u : E \rightarrow F$  est surjective si

## Image (et surjectivité)

### Définition 2.1.2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle image de  $u$ , l'ensemble noté  $\text{Im}(u)$  et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

**Remarque.**  $\text{Im}(u)$  est un **s.e.v. de  $F$**  (à démontrer en exercice).

**Exemple.** Soit  $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$ .  
Calculer  $\text{Im}(u_3)$ .

**Rappel.** Une application  $u : E \rightarrow F$  est surjective si pour tout  $y \in F$  il existe  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$ .

## Image (et surjectivité)

### Définition 2.1.2.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle image de  $u$ , l'ensemble noté  $\text{Im}(u)$  et donné par

$$\text{Im}(u) = \{y \in F : \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

**Remarque.**  $\text{Im}(u)$  est un **s.e.v. de  $F$**  (à démontrer en exercice).

**Exemple.** Soit  $u_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $u_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$ .  
Calculer  $\text{Im}(u_3)$ .

**Rappel.** Une application  $u : E \rightarrow F$  est surjective si pour tout  $y \in F$  il existe  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$ .

### Théorème 2.1.3.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶  $u$  est surjective,
- ▶  $\text{Im}(u) = F$ .

## Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros  $\mathcal{L}(E, F)$ ),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de  $E$  dans  $E$  (en gros  $\mathcal{L}(E, E)$  noté  $\mathcal{L}(E)$ ),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v.  $E$  et  $F$  sont isomorphes si il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

## Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros  $\mathcal{L}(E, F)$ ),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de  $E$  dans  $E$  (en gros  $\mathcal{L}(E, E)$  noté  $\mathcal{L}(E)$ ),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v.  $E$  et  $F$  sont isomorphes si il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

**Attention.** Toute application linéaire entre  $E$  et  $F$  n'est pas un isomorphisme !

## Vocabulaire

- ▶ homomorphisme : application linéaire (en gros  $\mathcal{L}(E, F)$ ),
- ▶ endomorphisme : application linéaire de  $E$  dans  $E$  (en gros  $\mathcal{L}(E, E)$  noté  $\mathcal{L}(E)$ ),
- ▶ isomorphisme : application linéaire **bijective**,
- ▶ automorphisme : endomorphisme + isomorphisme,
- ▶ Deux e.v.  $E$  et  $F$  sont isomorphes si il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

**Attention.** Toute application linéaire entre  $E$  et  $F$  n'est pas un isomorphisme !

### Proposition 2.1.10.

- ▶ Si  $u$  est un isomorphisme alors  $u^{-1}$  aussi.

# Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorème 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors

- ▶ L'image d'une famille liée de  $E$  par  $u$  est une famille liée de  $F$ .
- ▶ Si  $u$  est **injective**, l'image d'une famille libre de  $E$  par  $u$  est une famille libre de  $F$ .
- ▶ L'image d'une famille génératrice de  $E$  par  $u$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$ .
- ▶ Si  $u$  est **surjective**, l'image d'une famille génératrice de  $E$  par  $u$  est une famille génératrice de  $F$ .

# Image d'une famille libre, image d'une famille génératrice

Théorème 2.1.1, Proposition 2.1.6 et Proposition 2.1.7.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors

- ▶ L'image d'une famille liée de  $E$  par  $u$  est une famille liée de  $F$ .
- ▶ Si  $u$  est **injective**, l'image d'une famille libre de  $E$  par  $u$  est une famille libre de  $F$ .
- ▶ L'image d'une famille génératrice de  $E$  par  $u$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$ .
- ▶ Si  $u$  est **surjective**, l'image d'une famille génératrice de  $E$  par  $u$  est une famille génératrice de  $F$ .

Corollaire (voir Proposition 2.1.8.)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶  $u$  est bijective ( $\ker(u) = \{0_E\}$  et  $\text{Im}(u) = F$ ),
- ▶ l'image d'une base de  $E$  par  $u$  est une base de  $F$ .

## Résumé

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a montré que :

- (a) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **liée** dans  $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **liée** dans  $F$ ,
- (b) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **libre** +  $u$  injective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **libre**,
- (c.1) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **génératrice**  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $\text{Im}(u)$ ,
- (c.2) si  $u$  est surjective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $F$ .

## Résumé

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a montré que :

- (a) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **liée** dans  $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **liée** dans  $F$ ,
- (b) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **libre** +  $u$  injective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **libre**,
- (c.1) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **génératrice**  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $\text{Im}(u)$ ,
- (c.2) si  $u$  est surjective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $F$ .

Proposition 2.1.9.

$E$  et  $F$  sont isomorphes  $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$ .

## Résumé

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a montré que :

- (a) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **liée** dans  $E \Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **liée** dans  $F$ ,
- (b) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **libre** +  $u$  injective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **libre**,
- (c.1) si  $(e_1, \dots, e_n)$  **génératrice**  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $\text{Im}(u)$ ,
- (c.2) si  $u$  est surjective  $\Rightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n))$  **génératrice** de  $F$ .

Proposition 2.1.9.

$E$  et  $F$  sont isomorphes  $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$ .

Questions :

- (d) Si  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est génératrice de  $F$  est-ce que  $(e_1, \dots, e_n)$  est génératrice de  $E$  ?
- (e) Si  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est libre dans  $F$  est-ce que  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre dans  $E$  ?

# Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

# Matrices

## Définition.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on appelle matrice de  $n$  lignes et  $p$  colonnes toute famille  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  d'éléments du corps  $K$ . On représente la matrice sous la forme d'un **tableau** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

# Matrices

## Définition.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , on appelle matrice de  $n$  lignes et  $p$  colonnes toute famille  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  d'éléments du corps  $K$ . On représente la matrice sous la forme d'un **tableau** :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

**Remarque.** Dans la suite on notera plus simplement  $\mathcal{M}_{n,p}$ .

## Vocabulaire (voir Définition 2.2.2.)

- ▶ Si  $p = 1$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}$  est appelée **matrice colonne**.
- ▶ Si  $n = 1$  une matrice de  $\mathcal{M}_{1,p}$  est appelée **matrice ligne**.
- ▶ Si  $n = p$  une matrice de  $\mathcal{M}_{n,n}$  est appelée **matrice carrée** d'ordre  $n$ . On note plus simplement  $\mathcal{M}_n$  cet ensemble.
- ▶ Si  $n = p$  et  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$  la matrice est dite **diagonale**. De plus, on appelle **matrice identité**  $I$  la matrice vérifiant  $a_{ii} = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  (avec  $a_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ ).
- ▶ Si  $n = p$  et  $a_{ij} = 0$  pour  $i < j$  la matrice est dite **triangulaire inférieure**.
- ▶ Si  $n = p$  et  $a_{ij} = 0$  pour  $i > j$  la matrice est dite **triangulaire supérieure**.
- ▶ Si  $n = p$  on définit **la trace** de  $A$  par :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

# Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et soit  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . On définit

- ▶ la **matrice somme**  $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit**  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  (avec  $\lambda \in K$ ) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

# Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et soit  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . On définit

- ▶ la **matrice somme**  $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit**  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  (avec  $\lambda \in K$ ) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

**Théorème.**

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un **e.v.** sur  $K$ . De plus  **$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$** .

# Opérations sur les matrices

Définition 2.2.4 et 2.2.5.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et soit  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . On définit

- ▶ la **matrice somme**  $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  par

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\},$$

- ▶ la **matrice produit**  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  (avec  $\lambda \in K$ ) par

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

**Théorème.**

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  muni des deux lois précédentes (somme de matrices et produit par un scalaire) est un **e.v.** sur  $K$ . De plus  **$\dim(\mathcal{M}_{n,p}(K)) = np$** .

**Question.** Existence d'un lien entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  ?

# Applications linéaires et matrices

## Définition 2.2.1.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . On associe à  $u$  une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  représentant  $u$  dans les bases  $E$  et  $F$  sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} u(e_1) \\ \downarrow \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{matrix} & \begin{matrix} u(e_p) \\ \downarrow \\ \end{matrix} \\ =A \end{pmatrix}} \leftarrow \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}$$

# Applications linéaires et matrices

## Définition 2.2.1.

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . On associe à  $u$  une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  représentant  $u$  dans les bases  $E$  et  $F$  sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(e_1) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{matrix}$$

**Conclusion.** Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est **entièrement définie via son image des éléments de la base de  $E$** , i.e.,  $u$  est entièrement définie par  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

# Produit de matrices

Définition.

Soit  $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ .  
On définit la matrice produit  $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$  par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

# Produit de matrices

Définition.

Soit  $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ .  
On définit la matrice produit  $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$  par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

**Attention !** Le produit  $AB$  de deux matrices  $A$  et  $B$  est possible **si et seulement si** le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$  !

# Produit de matrices

Définition.

Soit  $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ .  
On définit la matrice produit  $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$  par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, q\}.$$

**Attention !** Le produit  $AB$  de deux matrices  $A$  et  $B$  est possible **si et seulement si** le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$  !

**Attention !!** Le produit de matrices est associatif et distributif par rapport à la somme (voir Proposition 2.2.2.) Par contre le produit **n'est pas commutatif !!**

# Produit de matrices et composition

Proposition (voir Définition 2.2.6.)

On considère :

- ▶  $E$  un e.v. et  $\mathcal{E}$  sa base,
- ▶  $F$  un e.v. et  $\mathcal{F}$  sa base,
- ▶  $G$  un e.v. et  $\mathcal{G}$  sa base,
- ▶  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B$  sa représentation matricielle dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ ,
- ▶  $u \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $A$  sa représentation matricielle dans les bases  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$

Alors  $u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$  admet pour matrice  $C = AB$ .  
Schématiquement on a :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{v} & F & \xrightarrow{u} & G \\ & & B & & A \\ E & \xrightarrow{u \circ v} & & & G \\ & & C=AB & & \end{array}$$

## Calcul explicite de l'image d'un vecteur

Proposition (voir Section 2.2.5.)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$  la matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . On considère  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) = u(x) \in F$ . Alors on peut obtenir les composantes  $y_1, \dots, y_n$  du vecteurs  $y$  dans la base  $\mathcal{F}$  via l'opération matricielle :

$$Y = AX \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

# Matrice inverse

## Définition 2.2.7.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n$ . La matrice  $A$  est dite inversible si il existe une matrice  $C \in \mathcal{M}_n$  telle que  $AC = CA = I$ . Si  $C$  existe elle est unique et on la note  $A^{-1}$ .

# Matrice inverse

## Définition 2.2.7.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n$ . La matrice  $A$  est dite inversible si il existe une matrice  $C \in \mathcal{M}_n$  telle que  $AC = CA = I$ . Si  $C$  existe elle est unique et on la note  $A^{-1}$ .

## Proposition 2.2.4 et Proposition 2.2.5.

- ▶ Si  $A$  et  $B$  sont **deux matrices inversibles** de  $\mathcal{M}_n$  alors  $AB$  est inversible et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- ▶ Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  un **isomorphisme** et  $A$  la matrice représentant  $u$  dans les bases de  $E$  et  $F$ . Alors  $A$  est inversible et  $A^{-1}$  est la matrice représentative de  $u^{-1}$  dans les bases de  $F$  et  $E$ .

# Matrice transposée

## Définition 2.2.8.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ . On appelle transposée de  $A$  la matrice notée  $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}$  obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, i.e.,

$$(A^\top)_{ij} = a_{ji} \quad i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n.$$

## Proposition 2.2.6.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,m}$ , on a

$$(A^\top)^\top = A, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top.$$

## Définition 2.2.9.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n$ .

- ▶  $A$  est dite symétrique si  $A^\top = A$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ),
- ▶  $A$  est dite antisymétrique si  $A^\top = -A$  ( $a_{ij} = -a_{ji}$ ).

# Matrice de passage

## Définition 2.2.10.

On considère  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{E}'$  la matrice, notée  $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ , dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de  $\mathcal{E}'$  dans la base  $\mathcal{E}$ .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{matrix} \\ = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'} \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_n \end{matrix}$$

# Propriétés

## Proposition 2.2.8.

On considère  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . Alors la matrice de passage  $P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  est inversible et son inverse est  $P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}$ .

## Proposition 2.2.9.

Soit  $Q \in \mathcal{M}_n$  et soit  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On définit les vecteurs  $e'_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} e_i$ . Alors on a l'équivalence suivante :

$(e'_1, \dots, e'_n)$  est une base de  $E \Leftrightarrow Q$  est inversible.

## Changement de bases et composantes d'un vecteur

### Proposition 2.2.10.

On considère  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ . Soit  $x \in E$ , on note  $X$  et  $X'$  les matrices colonnes contenant les composantes de  $x$  dans les bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ . Soit  $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$  alors

$$X' = P^{-1}X (= P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}}X_{\mathcal{E}}) \quad \Leftrightarrow \quad X = PX' (= P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}X'_{\mathcal{E}'}).$$

## Changement de bases et application linéaire

### Théorème 2.2.1.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ . On note  $A$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{E}$  ( $A_{\mathcal{E}}$ ) et  $A'$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{E}'$  ( $A_{\mathcal{E}'}$ ). Enfin soit  $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ , alors

$$A' = P^{-1} A P \quad (A_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'})$$

**Remarque.** Les matrices associées au même endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont **semblables**.

### Proposition 2.2.11.

On considère  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n$ . Alors si  $A$  et  $B$  sont semblables

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B).$$

## Changement de bases et application linéaire

### Théorème 2.2.1.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux bases de  $E$ . On note  $A$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{E}$  ( $A_{\mathcal{E}}$ ) et  $A'$  la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{E}'$  ( $A_{\mathcal{E}'}$ ). Enfin soit  $P = P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$ , alors

$$A' = P^{-1} A P \quad (A_{\mathcal{E}'} = P_{\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'})$$

### Définition 2.2.11.

S'il existe  $P$  inversible telle que  $A' = P^{-1} A P$  alors  $A$  et  $A'$  sont dites semblables.

**Remarque.** Les matrices associées au même endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont **semblables**.

### Proposition 2.2.11.

On considère  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n$ . Alors si  $A$  et  $B$  sont semblables

$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B).$$

# Table of contents

1. Applications linéaires

2. Matrices

3. Théorème du rang

# Rang

## Définition 2.2.12.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle rang de  $u$  la dimension de  $\text{Im}(u)$ , i.e.,  $\text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ .

## Proposition 2.2.12.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , alors  $\text{Im}(A) = \text{vect}\langle A_1, \dots, A_p \rangle$ .

## Définition 2.2.14.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , alors  $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$ .

# Rang

## Définition 2.2.12.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , on appelle rang de  $u$  la dimension de  $\text{Im}(u)$ , i.e.,  $\text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ .

Remarques. On a

- ▶  $\text{rang}(u) \leq \dim(F)$  (car  $\text{Im}(u) \subset F$ ),
- ▶  $\text{rang}(u) \leq \dim(E)$  (car l'image d'une base de  $E$  génère  $\text{Im}(u)$ ).

## Définition 2.2.13.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , on appelle  $\text{Im}(A)$  le s.e.v. de  $\mathcal{M}_{n,1}$  défini par

$$Y \in \text{Im}(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}, Y = AX.$$

## Proposition 2.2.12.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , alors  $\text{Im}(A) = \text{vect}\langle A_1, \dots, A_p \rangle$ .

## Définition 2.2.14.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , alors  $\text{rang}(A) = \dim(\text{Im}(A))$ .

# Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

## Proposition 2.2.13.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , si on choisit  $\mathcal{E}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base de  $F$  et si on définit  $A$  la matrice associée à  $u$ . Alors

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(A).$$

## Calcul pratique.

- ▶ Def 2.2.14 et Prop 2.2.14  $\Rightarrow$  calcul du nombre maximal de colonnes ou lignes linéairement indépendantes.
- ▶ Si  $\text{rang}(u)$  connu alors  $\text{rang}(A)$  également.

# Lien entre rang d'une application linéaire et "sa" matrice

## Proposition 2.2.13.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , si on choisit  $\mathcal{E}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{F}$  une base de  $F$  et si on définit  $A$  la matrice associée à  $u$ . Alors

$$\text{rang}(u) = \text{rang}(A).$$

## Proposition 2.2.14.

- ▶ Si  $A$  et  $A'$  sont semblables alors elles ont le même rang.
- ▶  $A$  et  $A^T$  ont le même rang.

## Calcul pratique.

- ▶ Def 2.2.14 et Prop 2.2.14  $\Rightarrow$  calcul du nombre maximal de colonnes ou lignes linéairement indépendantes.
- ▶ Si  $\text{rang}(u)$  connu alors  $\text{rang}(A)$  également.

# Théorème du rang

Théorème 2.2.3.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\dim(\ker(u)) + \text{rang}(u) = \dim(E)$ .

# Théorème du rang

## Théorème 2.2.3.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\dim(\ker(u)) + \text{rang}(u) = \dim(E)$ .

## Proposition 2.2.15.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , si  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ▶  $u$  est injective,
- ▶  $u$  est surjective,
- ▶  $u$  est bijective.

## Noyau d'une matrice

### Définition 2.2.15.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ , on appelle noyau de  $A$  le s.e.v. de  $\mathcal{M}_{p,1}$ , noté  $\ker(A)$ , défini par

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} : AX = 0\}.$$

### Théorème 2.2.4.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$  alors

$$\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = p = \text{nb colonnes de } A.$$

### Proposition 2.2.16.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n$  alors

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n.$$