RÉSUMÉ CHAPITRE 2 MT23

ANTOINE ZUREK

Voici un tableau résumant les principales correspondances entre le langage des applications linéaires et celui des matrices. On considère E et F deux K e.v. et on note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire, on notera A sa matrice représentative dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Enfin on notera $A_1, \ldots, A_p$ les colonnes de la matrice A.

"application linéaire"	"matrice"
$u \in \mathcal{L}(E, F)$	$A \in \mathcal{M}_{n,p}$
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{p,1}$
$y \in F$	$Y \in \mathcal{M}_{n,1}$
$y = u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i)$	$Y = AX = x_1 A_1 + \ldots + x_p A_p$
$\ker(u) = \{x \in E \,:\, u(x) = 0_E\} \subset E$	$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} \,:\, AX = 0\} \subset \mathcal{M}_{p,1}$
$\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \,:\, \exists x \in E \, y = u(x)\} \subset F$	$\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1} \,:\, \exists X \in \mathcal{M}_{p,1} \, Y = AX\} \subset \mathcal{M}_{n,1}$
$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}\langle u(e_1), \ldots, u(e_p)\rangle$	$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\langle A_1, \ldots, A_p\rangle$
u injective $\Leftrightarrow \ker(u) = \{0_E\}$	$\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,p}}\} \Leftrightarrow (A_1, \ldots, A_p)$ f. libre
u surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = F$	$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1} \Leftrightarrow (A_1, \ldots, A_p)$ f. génératrice $\mathcal{M}_{n,1}$
$\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E)$	$\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = p$ (nombre de colonnes)

Enfin dans le cas $n = p$ il est important de garder en tête la suite d'équivalences :

$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(u) = n \Leftrightarrow \mathrm{rang}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

Université de Technologie de Compiègne, LMAC, 60200 Compiègne, France
Email address: `antoine.zurek@utc.fr`

Date: October 5, 2022.