Chapitre 3 : Déterminants

Antoine Zurek
Vincent Martin

LMAC - UTC

1. Définition des déterminants

2. Utilisation des déterminants

3. Systèmes linéaires

Table of contents

Définition du déterminant par récurrence

Dans ce chapitre nous considérons uniquement des matrices carrées.

Définition 3.1.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ (carrée). On définit l'application déterminant :

$$\det : \mathcal{M}_n \to K, \\ A \mapsto \det(A),$$

par récurrence via :

- si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$,
- si $n > 1$, on note $A_{|i,j|}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j. On pose alors

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{|1,1|}) + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1,k}\det(A_{|1,k|}) \\ + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n}\det(A_{|1,n|}).$$

Utilisation des déterminants

Utile pour :

- les systèmes linéaires, le calcul du rang, l'inversibilité d'une matrice, etc. (outil très coûteux en pratique);
- le calcul des valeurs propres (voir chap. 4);
- le changement de variable dans les intégrales multiples ;
- ...

Notations

Remarques :

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, alors $\det(A)$ est un scalaire !
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ on notera dans la suite

$$A = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_n),$$

où $A_j \in \mathcal{M}_{n,1}$ représente la colonne j de la matrice A.

- Dans la suite on notera

$$\det(A) = \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Rappel (!) sur le produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$. Alors $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}$ vérifie

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, q \\ &= \underline{A}_i B_j \quad \forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, q \end{aligned}$$

Rappel (!) sur le produit matriciel

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$. Alors $C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}$ vérifie

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, q \\
&= \underline{A}_i B_j \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, q \\
C_j &= A B_j \quad \forall j = 1, \ldots, q \\
C_j &= \sum_{k=1}^{p} A_k b_{kj} \quad \forall j = 1, \ldots, q.
\end{aligned}
$$

Conséquences immédiates de la définition (1)

Formules importantes :

- Si $n = 2$, alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

  Dans l'espace euclidien, c'est l'aire (orientée) du parallélogramme porté par A_1, A_2.

- Si $n = 3$ (produit mixte, règle de Sarrus)

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = (A_1 \wedge A_2) \cdot A_3.\end{aligned}$$

  Dans l'espace euclidien, c'est le volume (orienté) du parallélépipède porté par A_1, A_2, A_3.

Conséquences immédiates de la définition (2)

Remarques :

- Si A est triangulaire inférieure, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- De manière générale si n est "grand", le déterminant est long à calculer. Coût a priori : $\mathcal{O}(n!)$ (catastrophique !), ou $\mathcal{O}(n^3)$ si utilisation de la méthode de Gauss (voir MT09). Réfléchir à son calcul en pratique...

Conséquences immédiates de la définition (2)

Remarques :

- Si A est triangulaire inférieure, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- De manière générale si n est "grand", le déterminant est long à calculer. Coût a priori : $\mathcal{O}(n!)$ (catastrophique !), ou $\mathcal{O}(n^3)$ si utilisation de la méthode de Gauss (voir MT09). Réfléchir à son calcul en pratique...
  - sauf si la matrice contient beaucoup de 0 dans la première ligne.
- Dans la suite nous allons voir si il est possible de tirer avantage de cette propriété en "créant" des 0 sur la première ligne de la matrice par des opérations sur ses colonnes.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1.

Le déterminant est une fonction multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque colonne :

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n),$$

$$\det(A_1, \ldots, B + C, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1.

Le déterminant est une fonction multilinéaire, c'est-à-dire linéair par rapport à chaque colonne :

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n),$$

$$\det(A_1, \ldots, B + C, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Proposition 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- Si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Théorème 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors le déterminant de A ne change pas, si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

$$\forall k,\ \forall (\alpha_j)_{j \neq k} \in K^{n-1}, \quad \det(\dots, A_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j A_j, \dots) = \det(A)$$

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors le déterminant de A ne change pas, si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

$$\forall k,\ \forall (\alpha_j)_{j\neq k} \in K^{n-1}, \quad \det(\ldots, A_k + \sum_{j\neq k} \alpha_j A_j, \ldots) = \det(A)$$

Question : Est-il possible d'obenir des propriétés similaires par rapport aux lignes de la matrice ?

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Alors le déterminant de A ne change pas, si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

$$\forall k,\ \forall (\alpha_j)_{j \neq k} \in K^{n-1}, \quad \det(\dots, A_k + \sum_{j \neq k} \alpha_j A_j, \dots) = \det(A)$$

Question : Est-il possible d'obenir des propriétés similaires par rapport aux lignes de la matrice ?

Théorème 3.1.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors $\det(A) = \det(A^\top)$.

Propriétés du déterminant liées aux lignes

Théorème 3.1.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors

- le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes ;
- si A a deux lignes égales, le déterminant est nul;
- si l'on échange deux lignes de A, le déterminant change de signe ;
- le déterminant de A ne change pas, si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.

Conséquence : On va pouvoir développer le déterminant par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne.

Remarque : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Calcul pratique du déterminant

Définition 3.1.6.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n$. On appelle cofacteur d'indice i et j ou plus simplement cofacteur de a_{ij} le scalaire

$$\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}).$$

Conséquences. développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = a_{i1}\ \mathrm{cof}(a_{i1}) + \ldots + a_{in}\ \mathrm{cof}(a_{in}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ \mathrm{cof}(a_{ik}),$$

développement par rapport à la colonne j

$$\det(A) = a_{1j}\ \mathrm{cof}(a_{1j}) + \ldots + a_{nj}\ \mathrm{cof}(a_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \mathrm{cof}(a_{kj}).$$

Conclusion : On cherche à construire une matrice contenant "beaucoup" de zéros sur une ligne ou une colonne et on développe.

Table of contents

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$. On note $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs x_i. Enfin on note $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(X) = \det(X_1, \ldots, X_n).$$

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$. On note $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs x_i. Enfin on note $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(X) = \det(X_1, \ldots, X_n).$$

On a : $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)$ famille liée. Donc :

Théorème 3.2.2.

Soit E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. On considère $a_1, \ldots, a_n \in E$. Alors on a l'équivalence :

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Déterminant et inversibilité

Théorème 3.2.1,3,4 et Proposition 3.2.2.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$, alors

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
3. Si A est inversible $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ il existe $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = I_n$ ou $CA = I_n$, dans ce cas $C = A^{-1}$.

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Proposition 3.2.3.

Soient A et $A' \in \mathcal{M}_n$ deux matrices semblables, alors

$$\det(A) = \det(A').$$

Déterminant du produit (cas 3×3) (1)

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$ pour $n = 3$. On pose $C = BA$. La colonne j vaut $C_j = BA_j = \sum_{k=1}^{n} B_k a_{kj}$.

Par exemple ($n = 3$) : $C_1 = B_1 a_{11} + B_2 a_{21} + B_3 a_{31}$.

Donc par multilinéarité :

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det(C_1, C_2, C_3) = \det(BA_1, BA_2, BA_3) \\
&= \det\Big(\sum_{k_1=1}^{3} B_{k_1} a_{k_1 1}, \sum_{k_2=1}^{3} B_{k_2} a_{k_2 2}, \sum_{k_3=1}^{3} B_{k_3} a_{k_3 3}\Big) \\
&= \sum_{k_1=1}^{3} \sum_{k_2=1}^{3} \sum_{k_3=1}^{3} a_{k_1 1} a_{k_2 2} a_{k_3 3} \det(B_{k_1}, B_{k_2}, B_{k_3}) \\
&= \sum_{k_1 \neq k_2, k_2 \neq k_3, k_3 \neq k_1} a_{k_1 1} a_{k_2 2} a_{k_3 3} \det(B_{k_1}, B_{k_2}, B_{k_3}).
\end{aligned}$$

En effet, parmi les 27 termes de la triple somme, beacoup sont nuls, car s'il y a deux colonnes égales, le déterminant est nul.

Déterminant du produit (cas 3×3) (2)

$$\det(C) = \sum_{k_1 \neq k_2, k_2 \neq k_3, k_3 \neq k_1} a_{k_1 1} a_{k_2 2} a_{k_3 3} \det(B_{k_1}, B_{k_2}, B_{k_3})$$

Quand $n = 3$, il y a 6 termes dans la somme (nombre de permutations de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3\}$) :

$$\begin{array}{llcll}
(1,2,3) & \det(C) & = & a_{11}a_{22}a_{33} \det(B_1, B_2, B_3) & \\
(1,3,2) & & = + & a_{11}a_{32}a_{23} [\det(B_1, B_3, B_2) & = -\det(B_1, B_2, B_3)] \\
(2,1,3) & & = + & a_{21}a_{12}a_{33} [\det(B_2, B_1, B_3) & = -\det(B_1, B_2, B_3)] \\
(2,3,1) & & = + & a_{21}a_{32}a_{13} [\det(B_2, B_3, B_1) & = +\det(B_1, B_2, B_3)] \\
(3,1,2) & & = + & a_{31}a_{12}a_{23} [\det(B_3, B_1, B_2) & = +\det(B_1, B_2, B_3)] \\
(3,2,1) & & = + & a_{31}a_{22}a_{13} [\det(B_3, B_2, B_1) & = -\det(B_1, B_2, B_3)]
\end{array}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\det(C) = \det(BA) &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \\
&\quad + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}) \det(B) \\
&= \det(A) \det(B).
\end{aligned}$$

Formule du déterminant avec les permutations

Proposition 3.1.5.

Soient $A \in \mathcal{M}_n$. Le déterminant s'exprime comme une somme sur toutes les permutations σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ (notées $\mathcal{S}_n$) :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}, \quad \text{où } \varepsilon = +/-1 \text{ selon } \sigma.$$

- $\varepsilon(\sigma)$ vaut $+1$ quand la permutation se décompose en un nombre pair de transpositions (échange de 2 indices i et j)
- $\varepsilon(\sigma)$ vaut -1 quand la permutation se décompose en un nombre impair de transpositions.

Exemple : $\sigma = (1\ 3\ 2)$ (échange des indices 2 et 3): $\varepsilon(\sigma) = -1$.
$\sigma = (3\ 1\ 2)$ (échange des indices 2 et 3, puis 1 et 2): $\varepsilon(\sigma) = +1$.

Formule du déterminant avec les permutations

Proposition 3.1.5.

Soient $A \in \mathcal{M}_n$. Le déterminant s'exprime comme une somme sur toutes les permutations σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (notées $\mathcal{S}_n$) :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}, \quad \text{où } \varepsilon = +/-1 \text{ selon } \sigma.$$

- $\varepsilon(\sigma)$ vaut $+1$ quand la permutation se décompose en un nombre pair de transpositions (échange de 2 indices i et j)
- $\varepsilon(\sigma)$ vaut -1 quand la permutation se décompose en un nombre impair de transpositions.

Exemple : $\sigma = (1\ 3\ 2)$ (échange des indices 2 et 3): $\varepsilon(\sigma) = -1$.
$\sigma = (3\ 1\ 2)$ (échange des indices 2 et 3, puis 1 et 2): $\varepsilon(\sigma) = +1$.
Application : dans le cas $n = 3$, c'est la règle de Sarrus :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le déterminant de toute matrice représentant u dans une base arbitraire de E

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le déterminant de toute matrice représentant u dans une base arbitraire de E

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$. On a vu au chapitre 2 que A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. De plus A' donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base $((1,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\det(A) = \det(A') = -1 = \det(u)$$

Rang d'une matrice (1)

Définition 3.2.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle matrice extraite de A une matrice constituée "d'intersections" de lignes et colonnes de A.

Théorème 3.2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice $\widehat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ inversible extraite de A.

Rang d'une matrice (2)

Proposition 3.2.4.

Soit E un K e.v. de dimension n et soit $(x_1, \ldots, x_p)$ p vecteurs de E avec $p \leq n$. On note $X = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}$ où $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}$ est une matrice colonne contenant les composantes du vecteur x_i. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre,
- $\mathrm{rg}(X) = p$ (avec $X = (X_1, \ldots, X_p)$),
- il existe une matrice extraite de X à p lignes et p colonnes inversible.

Table of contents

Notations

Il existe un isomorphisme entre K^n et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. En effet à tout vecteur $x \in K^n$ on peut associer une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ dont les coefficients sont les composantes du vecteur x. Dans la suite on identifiera ces deux éléments et on utilisera la notation x pour désigner indistinctement $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ ou $x \in K^n$.

Exemple : On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = b_1, \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = b_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = b_3. \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 11 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

- Existence d'une solution pour un vecteur b :

  Il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}(A)$.

- Unicité de la solution (si elle existe) :

  $Ax = b$ admet une unique solution $\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$.

  Le système admet une infinité de solutions : Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors pour $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$ on peut ajouter un vecteur $x^* \in \ker(A)$ et dans ce cas $x + x^*$ vérifie

$$A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b.$$

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

- Existence d'une solution pour un vecteur b :

$$\text{Il existe } x \in \mathcal{M}_{p,1} \text{ vérifiant } Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}(A).$$

- Unicité de la solution (si elle existe) :

$$Ax = b \text{ admet une unique solution} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}.$$

Le système admet une infinité de solutions : Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors pour $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$ on peut ajouter un vecteur $x^* \in \ker(A)$ et dans ce cas $x + x^*$ vérifie

$$A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b.$$

Conclusions : (i) Le système $Ax = b$ admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions soit aucune solution.
(ii) Il est toujours utile d'étudier le noyau de A !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- Si $\ker(A) = \{0\}$, alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.
- Si $\ker(A) \neq \{0\}$, alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- Si $\ker(A) = \{0\}$, alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.
- Si $\ker(A) \neq \{0\}$, alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.

Etape 2. On cherche une solution particulière à l'équation inhomogène $Ax = b$

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Remarque. Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors la solution est de la forme :

solution eq homogène + solution particulière.

Cas particulier de matrices carrées : $A \in \mathcal{M}_n$

Le système $Ax = b$ admet une solution unique $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. En effet $\det(A) \neq 0$ équivaut à A inversible. Dans ce cas la solution du sytème est donnée par $x = A^{-1}b$.

Si $\det(A) = 0$:

- Si $b \notin \mathrm{Im}(A)$, il n'y a pas de solution,
- Si $b \in \mathrm{Im}(A)$, alors $Ax = b$ admet une infinité de solutions.

Calcul de la solution :

- On utilise la méthode du pivot de Gauss (calcul pratique).
- Si $\det(A) \neq 0$, on peut utiliser la formule de Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \ldots, A_n)}{\det(A)}.$$

Cette formule théorique n'est pas (ou peu) utilisée en pratique !

Calcul de l'inverse d'une matrice (1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on suppose que A est inversible (i.e. $\det(A) \neq 0$). Comment calculer A^{-1} ?

- À la main : en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on cherche à résoudre le système

$$Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y.$$

- Numériquement : on cherche à résoudre n systèmes linéaires

$$AB = I \Leftrightarrow AB_j = I_j \quad j = 1, \dots, n.$$

- Théoriquement : on utilise la formule de Cramer pour résoudre

$$AB_j = I_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Calcul de l'inverse d'une matrice (2)

Définition 3.3.1.

On appelle co-matrice de $A \in \mathcal{M}_n$, notée $\operatorname{co}(A)$, la matrice des cofacteurs de A

$$\operatorname{co}(A) = (\operatorname{cof}(a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec

$$\operatorname{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}) \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Théorème 3.3.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{co}(A)\right)^{\top}.$$

Calcul de l'inverse d'une matrice (3):

Formule de Cramer (si A inversible)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{co}(A)\right)^{\top}.$$

Cas pratique : $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(et on le vérifie!)

Rappels sur le rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$. Alors on a : $\mathrm{rg}(A) \leq \min(p, q)$ et

$$
\begin{array}{rcllcl}
\mathrm{rg}(A) & = & \dim(\mathrm{Im}(A)) & & = & \mathrm{rg}(A^T) \\
 & = & p - \dim(\ker(A)) & & = & n - \dim(\ker(A^T)) \\
 & = & \text{nb colonnes lin. indép.} & & = & \text{nb lignes lin. indép.} \\
 & = & r \text{ max tq } \widehat{A} \in \mathcal{M}_{rr} \text{ inversible} & & & (\widehat{A} \text{ extraite de } A)
\end{array}
$$