Chapitre 3 : Déterminants

Antoine Zurek

LMAC - UTC

Table of contents

Définition du déterminant par récurrence

Définition 3.1.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$. On définit l'application déterminant :

$$\begin{aligned} \det\,:\, \mathcal{M}_n &\to K, \\ A &\mapsto \det(A), \end{aligned}$$

par récurrence via :

- si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$,
- si $n > 1$, on not $A_{|i,j|}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j, on pose alors

$$\begin{aligned} \det(A) = a_{11} \det(A_{|1,1|}) + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1,k} \det(A_{|1,k|}) \\ + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det(A_{|1,n|}). \end{aligned}$$

Conséquences immédiates de la définition (1)

Remarques :

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ alors $\det(A)$ est un scalaire !

- Dans la suite on notera

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Conséquences immédiates de la définition (1)

Remarques :

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ alors $\det(A)$ est un scalaire !

- Dans la suite on notera

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Formules importantes :

- Si $n = 2$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Si $n = 3$

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Conséquences immédiates de la définition (2)

Remarques :

- Si A est triangulaire inférieure alors $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$,
- De manière générale si n est "grand", le déterminant est long à calculer sauf si la matrice contient beaucoup de 0 dans la première ligne.
- Dans la suite nous allons voir si il est possible de tirer avantage de cette propriété en "créant" des 0 sur la première ligne de la matrice par des opérations sur ses colonnes.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$ on notera dans la suite

$$A = (A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n),$$

où $A_j \in \mathcal{M}_{n,1}$ représente la colonne j de la matrice A.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1.

Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, à savoir

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n),$$

$$\det(A_1, \ldots, B + C, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (1)

Théorème 3.1.1.

Le déterminant est une fonction linéaire de chaque colonne, à savoir

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n),$$

$$\det(A_1, \ldots, B + C, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n),$$

avec B et $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $\lambda \in K$.

Proposition 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
- Si une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (2)

Proposition 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes adjacentes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes adjacentes, le déterminant change de signe.

Théorème 3.1.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on a les propriétés suivantes :

- Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.
- Si on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors le déterminant de A ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors le déterminant de A ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Question : Est-il possible d'obenir des propriétés similaires par rapport aux lignes de la matrice ?

Propriétés du déterminant liées aux colonnes (3)

Théorème 3.1.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors le déterminant de A ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Question : Est-il possible d'obenir des propriétés similaires par rapport aux lignes de la matrice ?

Théorème 3.1.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors $\det(A) = \det(A^\top)$.

Propriétés du déterminant liées aux lignes

Théorème 3.1.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, alors

- le déterminant est une fonction multilinéaire de chacune des lignes,
- Si A a deux lignes égales, le déterminant est nul,
- Si l'on échange deux lignes de A, le déterminant change de signe,
- le déterminant de A ne change pas si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.

Conséquence : On va pouvoir développer le déterminant par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne.

Remarque : le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

Calcul pratique du déterminant

Définition 3.1.6.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n$. On appelle cofacteur d'indice i et j ou plus simplement cofacteur de a_{ij} le scalaire

$$\operatorname{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}).$$

Conséquences. développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = a_{i1} \operatorname{cof}(a_{i1}) + \ldots + a_{in} \operatorname{cof}(a_{in}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \operatorname{cof}(a_{ik}),$$

développement par rapport à la colonne j

$$\det(A) = a_{1j} \operatorname{cof}(a_{1j}) + \ldots + a_{nj} \operatorname{cof}(a_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof}(a_{kj}).$$

Conclusion : On cherche à construire une matrice contenant "beaucoup" de zéros sur une ligne ou une colonne et on développe.

Table of contents

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$. On note $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs x_i. Enfin on note $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(X) = \det(X_1, \ldots, X_n).$$

Conséquence : $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)$ famille liée.

Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.1.2.

On considère E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$. On note $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ les matrices colonnes contenant les composantes des vecteurs x_i. Enfin on note $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_n$. Alors par définition :

$$\det(x_1, \ldots, x_n) = \det(X) = \det(X_1, \ldots, X_n).$$

Théorème 3.2.2.

Soit E un K e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{E}$ de référence. On considère $a_1, \ldots, a_n \in E$. Alors on a l'équivalence :

$$(a_1, \ldots, a_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Conséquence : $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n)$ famille liée.

Déterminant et inversibilité

Théorème 3.2.1,3,4 et Proposition 3.2.2.

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n$ alors

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
2. A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$,
3. Si A est inversible $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
4. A est inversible $\Leftrightarrow$ il existe $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $AC = I_n$ ou $CA = I_n$, dans ce cas $C = A^{-1}$.

Attention : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Proposition 3.2.3.

Soient A et $A' \in \mathcal{M}_n$ deux matrices semblables alors

$$\det(A) = \det(A').$$

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le déterminant de toute matrice représentant u dans une base arbitraire de E

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 3.2.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E K e.v. de dimension finie. On appelle déterminant de u le déterminant de toute matrice représentant u dans une base arbitraire de E

Exemple. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$. On a vu au chapitre 2 que A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. De plus A' donnée par

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

représente u dans la base $((1,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\det(A) = \det(A') = -1 = \det(u)$$

Rang d'une matrice (1)

Définition 3.2.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. On appelle matrice extraite de A une matrice constituée "d'intersections" de lignes et colonnes de A.

Théorème 3.2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice extraite $\widehat{A} \in \mathcal{M}_{r,r}$ de A inversible.

Rang d'une matrice (2)

Proposition 3.2.4.

Soit E un K e.v. de dimension n et soit $(x_1, \ldots, x_p)$ p vecteurs de E avec $p \leq n$. On note $X = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}$ où $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}$ est une matrice colonne contenant les composantes du vecteur x_i. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre,
- $\text{rang}(X) = p$ (avec $X = (X_1, \ldots, X_p)$),
- il existe une matrice extraite de X à p lignes et p colonnes inversible.

Table of contents

Notations

Il existe un isomorphisme entre K^n et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. En effet à tout vecteur $x \in K^n$ on peut associer une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ dont les coefficients sont les composantes du vecteur x. Dans la suite on identifiera ces deux éléments et on utilisera la notation x pour désigner indistinctement $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ ou $x \in K^n$.

Exemple : On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = b_1, \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + 11x_4 & = b_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = b_3. \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 11 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

- Existence d'une solution pour un vecteur b :

  $$\text{Il existe } x \in \mathcal{M}_{p,1} \text{ vérifiant } Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}(A).$$

- Unicité de la solution (si elle existe) :

  $$Ax = b \text{ admet une unique solution} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}.$$

  Le système admet une infinité de solutions : Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$ alors pour $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$ on peut ajouter un vecteur $x^* \in \ker(A)$ et dans ce cas $x + x^*$ vérifie

  $$A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b.$$

Existence de solution(s) pour $Ax = b$

On cherche à résoudre le système $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}$ sont connus et $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ est le vecteur inconnu du système.

- Existence d'une solution pour un vecteur b :

$$\text{Il existe } x \in \mathcal{M}_{p,1} \text{ vérifiant } Ax = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}(A).$$

- Unicité de la solution (si elle existe) :

$$Ax = b \text{ admet une unique solution} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}.$$

Le système admet une infinité de solutions : Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$ alors pour $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$ on peut ajouter un vecteur $x^* \in \ker(A)$ et dans ce cas $x + x^*$ vérifie

$$A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b.$$

Conclusions : (i) Le système $Ax = b$ admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions soit aucune solution.
(ii) Il est toujours utile d'étudier le noyau de A !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- Si $\ker(A) = \{0\}$ alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.
- Si $\ker(A) \neq \{0\}$ alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.

Résolution pratique de $Ax = b$

Etape 1. On détermine $\ker(A)$, i.e., on cherche à résoudre l'équation homogène $Ax = 0$.

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

2 cas :

- Si $\ker(A) = \{0\}$ alors le système peut admettre une unique solution si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.
- Si $\ker(A) \neq \{0\}$ alors le système admet une infinité de solutions si $b \in \mathrm{Im}(A)$ ou pas de solution.

Etape 2. On cherche une solution particulière à l'équation inhomogène $Ax = b$

On utilise la méthode du pivot de Gauss !

Remarque. Si $\ker(A) \neq \{0\}$ et $b \in \mathrm{Im}(A)$ alors la solution est de la forme :

solution eq homogène + solution particulière.

Cas particulier $A \in \mathcal{M}_n$

Le système $Ax = b$ admet une solution unique $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. En effet $\det(A) \neq 0$ équivaut à A inversible. Dans ce cas la solution du sytème est donnée par $x = A^{-1}b$.

Si $\det(A) = 0$:

- Si $b \notin \mathrm{Im}(A)$ il n'y a pas de solution,
- Si $b \in \mathrm{Im}(A)$ alors $Ax = b$ admet une infinité de solutions.

Calcul de la solution :

- On utilise la méthode du pivot de Gauss (calcul pratique).
- si $\det(A) \neq 0$ on peut utiliser la formule de Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}.$$

Cette formule théorique n'est pas (ou peu) utilisée en pratique !

Calcul de l'inverse d'une matrice (1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on suppose que A est inversible (i.e. $\det(A) \neq 0$).
Comment calculer A^{-1} ?

- À la main : en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on cherche à résoudre le système

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

- Numériquement : on cherche à résoudre n systèmes linéaires

$$AB = I \Leftrightarrow AB_j = I_j \quad j = 1, \ldots, n.$$

- Théoriquement : on utilise la formule de Cramer pour résoudre

$$AB_j = I_j \quad j = 1, \ldots, n.$$

Calcul de l'inverse d'une matrice (2)

Définition 3.3.1.

On appelle co-matrice de $A \in \mathcal{M}_n$, notée $\mathrm{co}(A)$, la matrice des cofacteurs de A

$$\mathrm{co}(A) = (\mathrm{cof}(a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec

$$\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{|i,j|}) \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Théorème 3.3.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, (\mathrm{cof}(A))^{\top}.$$