MT09 : Chapitre 4
Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires (et non-linéaires)

MT09
Vincent.Martin@utc.fr

UTC
Compiègne, France

UTC, A2023

Plan

1. Introduction, motivations
2. Systèmes linéaires
   - Principe des méthodes itératives linéaires
   - Méthode de Jacobi
   - Méthode de Gauss–Seidel
   - Convergence des méthodes itératives linéaires
3. Systèmes non-linéaires : point fixe

Plan

1. Introduction, motivations
2. Systèmes linéaires
   - Principe des méthodes itératives linéaires
   - Méthode de Jacobi
   - Méthode de Gauss–Seidel
   - Convergence des méthodes itératives linéaires
3. Systèmes non-linéaires : point fixe

Systèmes linéaires : introduction et motivation

- Pourquoi résoudre des systèmes linéaires ?
  - Pour résoudre des systèmes linéaires $Ax = b$ (A matrice $n \times n$) et non-linéaires $f(x) = 0$ (f fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).
    - dans tous les domaines. Ex : éléments finis (NF04)...
  - Très gros systèmes *creux*
    - $n \geq 100\,000$ lignes : typique.
    - très peu de termes non-nuls par ligne.
  - Systèmes pleins de taille modérée

Systèmes linéaires : introduction et motivation

- Pourquoi résoudre des systèmes linéaires ?
  - Pour résoudre des systèmes linéaires $Ax = b$ (A matrice $n \times n$) et non-linéaires $f(x) = 0$ (f fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).
    - dans tous les domaines. Ex : éléments finis (NF04)...
  - Très gros systèmes *creux*
    - $n \geq 100\,000$ lignes : typique.
    - très peu de termes non-nuls par ligne.
  - Systèmes pleins de taille modérée
- 2 types de méthodes :

Méthodes directes

$\Longrightarrow$ Chap. 2.
Algorithme : on passe par toutes les lignes de A.
$\mathcal{O}(n^p)$ opérations fixe au départ.

Méthodes itératives

$\Longrightarrow$ Chap. 4.
Algorithme : suite d'itérés $x^{(k)}$ qui converge vers x.
Nombre infini (?) d'itérations.

Systèmes linéaires : introduction et motivation

- Pourquoi résoudre des systèmes linéaires ?
  - Pour résoudre des systèmes linéaires $Ax = b$ (A matrice $n \times n$) et non-linéaires $f(x) = 0$ (f fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).
    - dans tous les domaines. Ex : éléments finis (NF04)...
  - Très gros systèmes *creux*
    - $n \geq 100\,000$ lignes : typique.
    - très peu de termes non-nuls par ligne.
  - Systèmes pleins de taille modérée
- 2 types de méthodes :

Méthodes directes

$\Longrightarrow$ Chap. 2.
Algorithme : on passe par toutes les lignes de A.
$\mathcal{O}(n^p)$ opérations fixe au départ.

Méthodes itératives

$\Longrightarrow$ Chap. 4.
Algorithme : suite d'itérés $x^{(k)}$ qui converge vers x.
Nombre infini (?) d'itérations.

- Les 2 ont leurs avantages....

Systèmes linéaires : méthodes directes vs méthodes itératives

Résoudre $Ax = b$.

méthode	avantages	inconvénients
directe	robustesse, coût de calcul fixe	coût mémoire (remplissage), pivotage. . .
itérative	rapidité (?), faible remplissage	convergence (?), sensible au conditionnement (nécessité de préconditionner)

Note : **remplissage :** une matrice *creuse* A se factorise généralement en 2 matrices L et U *pleines* (sauf exceptions : matrices “bandes”. . .).

Plan

Plan

Méthode itérative : principe

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. But : résoudre $Ax^\star = b$.

- Se donner $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{tol} > 0$,
- Calculer $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}, x^{(k)}$, jusqu'à ce que $\|x^\star - x^{(k)}\| \leq \mathrm{tol}$ (critères à préciser…).

Méthode itérative : principe

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. But : résoudre $Ax^\star = b$.

- Se donner $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{tol} > 0$,
- Calculer $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k)}$, jusqu'à ce que $\|x^\star - x^{(k)}\| \leq \mathrm{tol}$ (critères à préciser...).

Idée : méthode itérative linéaire du type :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

(M inversible, M et N à déterminer).

Méthode itérative : principe

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. But : résoudre $Ax^\star = b$.

- Se donner $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{tol} > 0$,
- Calculer $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k)}$, jusqu'à ce que $\|x^\star - x^{(k)}\| \leq \mathrm{tol}$ (critères à préciser...).

Idée : méthode itérative linéaire du type :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

(M inversible, M et N à déterminer).
Si convergence vers $\tilde{x}$, alors par continuité $(M - N)\tilde{x} = b$. Solution recherchée $(\tilde{x} = x^\star) \iff M - N = A$.

Méthode itérative : principe

Résoudre $Ax^\star = b$ par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

Choix de M ? (ensuite N est fixé : $N = M - A$)

Méthode itérative : principe

Résoudre $Ax^\star = b$ par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

Choix de M ? (ensuite N est fixé : $N = M - A$)
M inversible, systèmes faciles à résoudre...

- M diagonale : méthode de Jacobi,
- M triangulaire inférieure : méthode de Gauss–Seidel (GS, différente de la méthode de Gauss !),
- ...
- autres méthodes possibles, pas forcément du type ci-dessus. Ces deux méthodes sont simples ! (Pas forcément les plus utilisées en pratique.)

Plan

Construction de la méthode de Jacobi

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \ldots + a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \cdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \qquad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j + a_{i,i}x_i = b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \qquad a_{i,i}x_i = b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j.$$

Construction de la méthode de Jacobi

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x^{(k)} \to x^{(k+1)} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1^{(k+1)} + a_{1,2}x_2^{(k)} + a_{1,3}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(k)} & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1^{(k)} + a_{2,2}x_2^{(k+1)} + a_{2,3}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(k)} & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1^{(k)} + a_{3,2}x_2^{(k)} + a_{3,3}x_3^{(k+1)} + \ldots + a_{3,n}x_n^{(k)} & = & b_3 \\ \cdots & & \\ a_{n,1}x_1^{(k)} + a_{n,2}x_2^{(k)} + a_{n,3}x_3^{(k)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(k+1)} & = & b_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} + a_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}.$$

Méthode de Jacobi : matriciellement

Décomposer $A = D - E - F$ (ce n'est pas une factorisation !) avec

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & -a_{n-1,3} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & -a_{n,3} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ 0 & 0 & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3,n-1} & -a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode de Jacobi : matriciellement

Avec Jacobi, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $Dx^{(k+1)} = b + (E + F)x^{(k)}$

Méthode de Jacobi : matriciellement

Avec Jacobi, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $Dx^{(k+1)} = b + (E + F)x^{(k)}$
Méthode de Jacobi (matriciellement) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \end{cases}$$

- $M = D = \mathrm{diag}(A)$: diagonale de A
- $N = E + F$: opposé de la partie hors diagonale de A

Méthode de Jacobi : matriciellement

Avec Jacobi, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $Dx^{(k+1)} = b + (E + F)x^{(k)}$
Méthode de Jacobi (matriciellement) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b \end{cases}$$

- $M = D = \mathrm{diag}(A)$: diagonale de A
- $N = E + F$: opposé de la partie hors diagonale de A
- Ce n'est **pas** ce qu'on programme en pratique !

Méthode de Jacobi : exemple 1 (matrice 3x3)

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left(\text{sol. év. : } x^\star = e_1\right)$$

Méthode de Jacobi : exemple 1 (matrice 3x3)

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{sol. év. : } x^\star = e_1)$$

$$D_1 = I_3, \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{sol. év. : } x^\star = e_1)$$

$$D_1 = I_3, \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour ce $b_1 = [1; -1; 2]^T$, Jacobi donne

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^{(4)} = \cdots = x^\star$$

Méthode de Jacobi : exemple 2 (matrice 3x3)

$$A_2 x = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{sol. év. : } x^\star = e_1)$$

$$D_2 = I_3, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi : exemple 2 (matrice 3x3)

$$A_2 x = b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{sol. év. : } x^\star = e_1)$$

$$D_2 = I_3, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour ce $b_2 = [1; -2; 0]^T$, Jacobi donne

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 9 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(4)} = \begin{pmatrix} -15 \\ 16 \\ 32 \end{pmatrix},$$

$$\ldots, x^{(20)} \approx \begin{pmatrix} -3.0\ 10^9 \\ 4.4\ 10^9 \\ 2.7\ 10^9 \end{pmatrix}, \ldots, x^{(40)} \approx \begin{pmatrix} -4.8\ 10^{19} \\ 6.9\ 10^{19} \\ 4.3\ 10^{19} \end{pmatrix}, \ldots$$

Plan

Construction de la méthode de Gauss–Seidel

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \ldots + a_{3,n}x_n & = & b_3 \\ \cdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \quad \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j + a_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \quad a_{i,i}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

Construction de la méthode de Gauss–Seidel

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x^{(k)} \to x^{(k+1)} \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1^{(k+1)} + a_{1,2}x_2^{(k)} + a_{1,3}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1,n}x_n^{(k)} & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1^{(k+1)} + a_{2,2}x_2^{(k+1)} + a_{2,3}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2,n}x_n^{(k)} & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1^{(k+1)} + a_{3,2}x_2^{(k+1)} + a_{3,3}x_3^{(k+1)} + \ldots + a_{3,n}x_n^{(k)} & = & b_3 \\ \cdots & & \\ a_{n,1}x_1^{(k+1)} + a_{n,2}x_2^{(k+1)} + a_{n,3}x_3^{(k+1)} + \ldots + a_{n,n}x_n^{(k+1)} & = & b_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \quad \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} + a_{i,i}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} = b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i \quad a_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}.$$

Méthode de Gauss–Seidel : matriciellement

Avec Gauss–Seidel, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} (-a_{i,j}) x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $(D - E)x^{(k+1)} = b + F x^{(k)}$

Méthode de Gauss–Seidel : matriciellement

Avec Gauss–Seidel, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} (-a_{i,j}) x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $(D - E)x^{(k+1)} = b + Fx^{(k)}$
Méthode de Gauss–Seidel (matriciellement) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ (D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \end{cases}$$

- $M = D - E$: partie triangulaire inférieure de A
- $N = F$: opposé de la partie strict. sup de A

Méthode de Gauss–Seidel : matriciellement

Avec Gauss–Seidel, le passage de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a_{i,i} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} (-a_{i,j}) x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)}$$

s'écrit matriciellement $(D - E)x^{(k+1)} = b + Fx^{(k)}$
Méthode de Gauss–Seidel (matriciellement) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ (D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b \end{cases}$$

- $M = D - E$: partie triangulaire inférieure de A
- $N = F$: opposé de la partie strict. sup de A
- Ce n'est **pas** ce qu'on programme en pratique !

Algorithme de Jacobi

```
Pour ii=1 à n
    Si |A(ii,ii)| ≤ tol0
        Sortir, erreur : diagonale de A nulle
    Fin Si
Fin Pour
x ⟵ x0
Pour kk=1 à Kmax
    Pour ii=1 à n
        s ⟵ 0
        Pour jj=1 à ii-1
            s ⟵ s + A(ii,jj) × x(jj)
        Fin Pour
        Pour jj=ii+1 à n
            s ⟵ s + A(ii,jj) × x(jj)
        Fin Pour
        y(ii) ⟵ (b(ii) − s) / A(ii,ii)
    Fin Pour
    Si ||y − x||/||x0|| ≤ tol1 ou Si ||Ay − b||/||b|| ≤ tol2
        Convergence: retourner y et kk.
    Sinon
        x ⟵ y
    Fin Si

Fin Pour
```

Algorithme de Gauss–Seidel

Algorithme de Gauss–Seidel

```
Pour ii=1 à n
    Si |A(ii,ii)| ≤ tol_0
        Sortir, erreur : diagonale de A nulle
    Fin Si
Fin Pour
x ⟵ x_0
Pour kk=1 à K_max
    Pour ii=1 à n
        s ⟵ 0
        Pour jj=1 à ii-1
            s ⟵ s + A(ii,jj) × y(jj)
        Fin Pour
        Pour jj=ii+1 à n
            s ⟵ s + A(ii,jj) × x(jj)
        Fin Pour
        y(ii) ⟵ (b(ii) − s) / A(ii,ii)
    Fin Pour
    Si ||y − x||/||x_0|| ≤ tol_1 ou Si ||Ay − b||/||b|| ≤ tol_2
        Convergence: retourner y et kk.
    Sinon
        x ⟵ y
    Fin Si

Fin Pour
```

Plan

Méthodes itératives linéaires : convergence

Ces méthodes se mettent sous la forme d'itérations linéaires :

$$(*) \begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \end{cases}$$

- Jacobi : $C_J = D^{-1}(E + F)$ et $d_J = D^{-1}b$.
- Gauss–Seidel : $C_{GS} = (D - E)^{-1}F$ et $d_{GS} = (D - E)^{-1}b$.

Proposition (Condition suffisante de convergence)

S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que

$$|||C||| < 1$$

la méthode $(*)$ est convergente quel que soit $x^{(0)}$, et elle converge vers la solution de $(I - C)\bar{x} = d$.

Démonstration : cf. polycopié.

Méthodes itératives linéaires : convergence

Itérations linéaires :

$$(*)\left\{\begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \end{array}\right.$$

Théorème (Condition nécessaire et suffisante de convergence)

La méthode itérative $(*)$ converge quel que soit $x^{(0)}$,
si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Proposition (Jacobi, GS : CS de CVG pour certaines matrices)

• *Si la matrice A est à diagonale strictement dominante,*
alors les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentes.
• *Si la matrice A est symétrique définie positive (SDP),*
alors la méthode de Gauss–Seidel est convergente.

Plan

Méthode du point fixe

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On étudie le problème *non linéaire* :

$$\text{Trouver } x \text{ tel que : } x = g(x).$$

On se donne une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Méthode du point fixe

Soit g une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On étudie le problème *non linéaire* :

$$\text{Trouver } x \text{ tel que : } x = g(x).$$

On se donne une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. La fonction g est dite contractante sur F, si :
$\exists\lambda$, vérifiant $0 \leq \lambda < 1$, tel que pour tout $x, y \in F$, on a

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda\|x - y\|.$$

Méthode du point fixe

Soit une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$

Definition

La suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy, si :
$\forall\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$, tel que pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, si $k \geq N$, alors

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon.$$

Méthode du point fixe

Soit une suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$

Definition

La suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy, si :
$\forall\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$, tel que pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, si $k \geq N$, alors

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon.$$

Résultat : dans F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, toute suite de Cauchy de F converge dans F (car un fermé est un complet de $\mathbb{R}^n$).

W

Méthode du point fixe

Théorème (du point fixe)

Soit g une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est contractante sur F et que $g(F) \subset F$ (F est stable par g).
Alors il existe un unique point fixe $\hat{x}$ dans F, vérifiant $\hat{x} = g(\hat{x})$.
De plus, la suite $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad \text{pour } k \geq 0, \end{cases}$$

converge vers $\hat{x}$.
Enfin, on a :

$$\|\hat{x} - x^{(k)}\| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Démonstration : cf. cours et polycopié.

Quelques remarques :

- théorème très puissant : théorème d'existence, *constructif*
  - le $\hat{x}$ peut être calculé (grâce à la suite).
- exemples de tels F pour $\mathbb{R}$: intervalles fermés non vides finis ou infinis ($\mathbb{R}$, $[a, \infty[$, $]-\infty, a]$, $[a, b]$, où $(a < b)$), mais pas que (!).
- il existe un $\hat{x}$ dans F, et il est unique. Mais il est possible qu'il y ait d'autres points fixes en dehors de F.