MT09-A2022 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30 minutes. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 3 points)*

Soient C une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ et d un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'itération linéaire :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} & = & Cx^{(k)} + d \quad \forall k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} & & \text{donné.} \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur C pour que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On veut résoudre le système $Ax = b$. Donner la matrice C et le vecteur d dans le cas où on applique la méthode de Gauss-Seidel. On définira les matrices D, E et F du cours.
3. On prend $n = 2$. On définit la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer C dans ce cas.
   (b) Donner une CNS sur les valeurs de a, b, c et d pour que la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

On se place sur l'espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n > 1$. Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. Pour une matrice A, donner la définition de la norme subordonnée $|||A|||$ et du conditionnement $\chi(A)$.
2. Donner les propriétés de norme matricielle que vérifie $|||\cdot|||$.
3. Prouver l'inégalité triangulaire pour $|||\cdot|||$.
4. Justifier que $\chi(A) \geq 1$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_2$ (en base 2). On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -1$, $U = 3$.
   (a) Écrire tous les flottants compris dans $[1/2, 1]$.
   (b) Calculer le flottant : $\tilde{x} = \frac{1}{2} \oplus \frac{5}{8}$. (On supposera que les arrondis sont faits vers $+\infty$.)
   (c) Calculer l'erreur relative entre $\tilde{x}$ et $x = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ On rappelle que $\varepsilon_{\text{mach}} = 2^{-t}$. Commenter le résultat.

MT09-A2022 - Examen médian

Durée : 1 heure.

Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *7 points.*

RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

La question 6 ne dépend que de la question 3. Les questions 4, 5 et 7 sont largement indépendantes des autres.

Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). On désire effectuer la factorisation $A = UL$ de A (au lieu de LU), où

- U est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale,
- et L est une matrice triangulaire inférieure avec des termes diagonaux non-nuls.

On suppose que cette factorisation existe.

1. Montrer que
$$A_{ij} = \sum_{\alpha=r}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha j}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$
où r est un entier dépendant de i et j à déterminer.

2. (a) Calculer $\underline{L}_n$ la dernière ligne de L.
   (b) Calculer U_n la dernière colonne de U. À quelle condition ce calcul est-il faisable?

3. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On suppose qu'on connaît $\underline{L}_{k+1}, \ldots, \underline{L}_n$ et $U_{k+1}, \ldots, U_n$. En utilisant le produit matriciel, montrer, en le faisant, que l'on peut calculer $\underline{L}_k$ et U_k. (On pourra chercher à exprimer les termes de la ligne k de A puis de la colonne k de A).
   À quelle condition ce calcul est-il faisable?

4. Montrer que si la factorisation $A = UL$ existe, alors elle est unique.

5. Soient les matrices par blocs :
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$
On suppose que $M_{11} \in \mathcal{M}_{r_1,r_1}(\mathbb{R})$ et $M_{22} \in \mathcal{M}_{r_2,r_2}(\mathbb{R})$ et que $N_{11} \in \mathcal{M}_{s_1,s_1}(\mathbb{R})$ et $N_{22} \in \mathcal{M}_{s_2,s_2}(\mathbb{R})$.
   (a) Donner les conditions sur r_1, r_2, s_1 et s_2 pour que le produit par blocs ait un sens. Donner également les tailles de M_{12} et de N_{21}.
   (b) Calculer le produit MN par blocs.
   (c) Pour $k = 0, \ldots, n-1$, on appelle $[A]_{n-k}$ les sous matrices de A constituées des A_{ij} tels que $i = n-k, \ldots, n$ et $j = n-k, \ldots, n$. Quelle est la taille de $[A]_{n-k}$? Que valent $[A]_{n-k}$ pour $k = 0$ et $k = n-1$?
   (d) À partir d'une décomposition par blocs des matrices U et L, écrire l'expression de $[A]_{n-k}$.

(e) Déduire de la question précédente que si la factorisation $A = UL$ est faisable, alors $[A]_{n-k}$ est inversible, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

6. Écrire une fonction scilab : `function [U, L] = UL(A)` qui effectue la factorisation $A = UL$. (Un bonus sera accordé pour une version vectorielle du programme).

7. Écrire une fonction scilab : `function [x] = resol(A, b)` qui résout le système $Ax = b$ avec la factorisation UL. On suppose que l'on dispose des fonctions du TP2, qui ne seront donc pas réécrites ici.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit un entier $n \geq 1$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers une limite $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que

$$\forall p = 1, 2, \ldots, \quad \|x_{p+1} - x_p\| \leq \lambda \|x_p - x_{p-1}\|.$$

On rappelle l'identité suivante : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda^i = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

1. Soit q un entier supérieur à p. Calculer une majoration de $\|x_q - x_p\|$ en fonction de $\|x_1 - x_0\|$ et des puissances de λ.

2. En faisant alors tendre q vers l'infini, en déduire une majoration de l'erreur $\|\hat{x} - x_p\|$ en fonction de λ, p et $x_1 - x_0$.

3. On suppose λ connu. Calculer une estimation du nombre d'itérations K pour lequel on est assuré que l'erreur relative $\frac{\|\hat{x}-x_p\|}{\|x_1-x_0\|}$ est inférieure à un $\varepsilon > 0$ donné.
   Application : on suppose que $\lambda = 1/2$ et on prend $\varepsilon = e^{-10}$, que vaut K ? (On prendra l'approximation $\ln(2) \approx 2/3$.)