MT09-A2022 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30 minutes. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 3 points)*

Soient C une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$ et d un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On étudie l'itération linéaire :

$$\begin{cases} x^{(k+1)} & = & Cx^{(k)} + d \quad \forall k = 0, 1, \ldots \\ x^{(0)} & & \text{donné.} \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur C pour que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

   Réponse : cf. cours : $\rho(C) < 1$ est équivalent au fait que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge quel que soit le vecteur de départ $x^{(0)}$. $\square$

2. On veut résoudre le système $Ax = b$. Donner la matrice C et le vecteur d dans le cas où on applique la méthode de Gauss-Seidel. On définira les matrices D, E et F du cours.

   Réponse : cf. cours : $C = (D - E)^{-1}F$ et $d = (D - E)^{-1}b$. $\square$

3. On prend $n = 2$. On définit la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer C dans ce cas.

   (b) Donner une CNS sur les valeurs de a, b, c et d pour que la méthode de Gauss-Seidel converge.

   Réponse : Il est nécessaire que $D - E$ soit inversible: a et b doivent être non nuls. Il vient :

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{bmatrix},$$

   donc Gauss-Seidel converge si et seulement si $\rho(C) = |\frac{bc}{ad}| < 1 \Longleftrightarrow |bc| < |ad|$ (ce qui implique que $ad \neq 0$: aucune restriction supplémentaire). $\square$

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

On se place sur l'espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n > 1$. Soit $|||\cdot|||$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$.

1. Pour une matrice A, donner la définition de la norme subordonnée $|||A|||$ et du conditionnement $\chi(A)$.

   Réponse : cf. cours. $\square$

2. Donner les propriétés de norme matricielle que vérifie $|||\cdot|||$.

   Réponse : cf. cours. $\square$

3. Prouver l'inégalité triangulaire pour $|||\cdot|||$.

   Réponse : soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Il vient

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\| &= \|Ax+Bx\| \\ &\leq \|Ax\|+\|Bx\| \quad \textbf{(inégalité triangulaire pour la norme vectorielle)} \\ &\leq |||A|||\,\|x\|+|||B|||\,\|x\| \quad \textbf{(propriété de la norme matricielle subordonnée)}.\end{aligned}$$

   Donc, comme $x \neq 0$,

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq |||A|||+|||B|||,$$

   le terme de gauche est un majorant indépendant de x, donc le $\sup$ qui est le plus petit des majorants reste plus petit que ce majorant. Il vient

$$|||A+B||| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq |||A|||+|||B|||.$$

   □

4. Justifier que $\chi(A) \geq 1$.

   Réponse : A doit être inversible. Comme $I = AA^{-1}$, on obtient $1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ix\|}{\|x\|} = |||I||| \leq |||A|||\,|||A^{-1}||| = \chi(A)$. □

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_2$ (en base 2). On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).

   Réponse : cf. cours.

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \pm 0.d_1d_2\ldots d_t\ 2^e \mid d_i \in \{0,1\}\ \forall i=2,\ldots,t, \quad d_1=1, \quad L \leq e \leq U \right\} \cup \{0\},$$

   où t est le nombre de chiffres significatifs, L et U constituent les bornes inférieure et supérieure de l'exposant e. Par convention, l'exposant e est choisi de façon que le premier chiffre d_1 soit toujours non-nul. Le nombre 0 est explicitement inséré dans $\mathcal{F}_2$ car 0 ne s'écrit pas comme un nombre flottant normal. □

2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -1$, $U = 3$.

   (a) Écrire tous les flottants compris dans $[1/2, 1]$.
   Réponse : sur $[1/2, 1[$, $e = 0$ et pour 1, $e = 1$. Les flottants valent :

$$(0.100)_2 = \frac{1}{2},\ (0.101)_2 = \frac{5}{8},\ (0.110)_2 = \frac{3}{4},\ (0.111)_2 = \frac{7}{8},\ (1.00)_2 = (0.100)_2 \times 2^1 = 1.$$

   □

   (b) Calculer le flottant : $\tilde{x} = \frac{1}{2} \oplus \frac{5}{8}$. (On supposera que les arrondis sont faits vers $+\infty$.)
   Réponse : cf. cours. On a :

$$\tilde{x} = \mathrm{fl}(0.100+0.101) = \mathrm{fl}(1.001) = 1.00 \textbf{ ou } 1.01 = 1.01, \ \textbf{d'après la règle d'arrondi.}$$

   Donc $\tilde{x} = \frac{5}{4}$. □

(c) Calculer l'erreur relative entre $\tilde{x}$ et $x = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ On rappelle que $\varepsilon_{\text{mach}} = 2^{-t}$. Commenter le résultat.

Réponse : on note e l'erreur relative définie par

$$e = \frac{\left|\frac{9}{8} - \frac{5}{4}\right|}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{9},$$

qui est bien $\leq \varepsilon_{\textbf{mach}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, conformément au cours. $\square$

MT09-A2022 - Examen médian
Durée : 1 heure.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *7 points.*
RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

La question 6 ne dépend que de la question 3. Les questions 4, 5 et 7 sont largement indépendantes des autres.

Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. On désire effectuer la factorisation $A = UL$ de A (au lieu de LU), où

- U est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale,
- et L est une matrice triangulaire inférieure avec des termes diagonaux non-nuls.

On suppose que cette factorisation existe.

1. Montrer que

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=r}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha j}, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

où r est un entier dépendant de i et j à déterminer.

Réponse : $U_{ij} = 0$ si $i > j$ et $L_{ij} = 0$ si $j > i$. Donc si $i \leq \alpha$ alors $U_{i\alpha} \neq 0$ *a priori*, et si $j \leq \alpha$ alors $L_{\alpha j} \neq 0$ *a priori*. Donc pour $i, j = 1, \ldots, n$, il vient :

$$A_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha j} = \sum_{\alpha=\max\{i,j\}}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha j}.$$

□

2. (a) Calculer $\underline{L}_n$ la dernière ligne de L.

Réponse : Pour $j = 1, \ldots, n$, $A_{nj} = \sum_{\alpha=\max\{n,j\}}^{n} U_{n\alpha} L_{\alpha j} = U_{nn} L_{nj} = L_{nj}$ car $U_{nn} = 1$. Donc finalement :

$$L_{nj} = A_{nj} \quad \forall j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

soit en vecteur ligne $\underline{L}_n = \underline{A}_n$. □

(b) Calculer U_n la dernière colonne de U. À quelle condition ce calcul est-il faisable?

Réponse : Pour $i = 2, \ldots, n$, $A_{in} = \sum_{\alpha=\max\{i,n\}}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha n} = U_{in} L_{nn}$, d'où on déduit :

$$U_{in} = \frac{A_{in}}{L_{nn}} \quad \forall i = 2, \ldots, n, \quad \textbf{si } L_{nn} \neq 0, \tag{2}$$

soit en vecteur colonne $U_n = \dfrac{1}{L_{nn}} A_n$. On remarque que l'on a bien $U_{nn} = \frac{A_{nn}}{L_{nn}} = 1$. Ce calcul est faisable si le "pivot" $L_{nn} \neq 0$. □

3. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On suppose qu'on connaît $\underline{L}_{k+1}, \ldots, \underline{L}_n$ et $U_{k+1}, \ldots, U_n$. En utilisant le produit matriciel, montrer, en le faisant, que l'on peut calculer $\underline{L}_k$ et U_k. (On pourra chercher à exprimer les termes de la ligne k de A puis de la colonne k de A).

   À quelle condition ce calcul est-il faisable?

   Réponse : on fait une récurrence sur k. Commençons par la ligne k de A pour déterminer $\underline{L}_k$. Pour $j = 1, \ldots, k$ (L est triangulaire inférieure),

$$\begin{aligned}
A_{kj} &= \sum_{\alpha=\max\{k,j\}}^{n} U_{k\alpha} L_{\alpha j} \quad \textbf{où } \max\{k,j\} = k \\
&= U_{kk} L_{kj} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} U_{k\alpha} L_{\alpha j} \quad \textbf{où } U_{k\alpha} \in U_\alpha \textbf{ et } L_{\alpha j} \in \underline{L}_\alpha \textbf{ sont connues car } \alpha \geq k+1 \\
&= L_{kj} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} U_{k\alpha} L_{\alpha j} \quad \textbf{car } U_{kk} = 1,
\end{aligned}$$

   d'où on déduit

$$L_{kj} = A_{kj} - \sum_{\alpha=k+1}^{n} U_{k\alpha} L_{\alpha j} \quad \forall j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

   Conseil : faites des dessins pour comprendre et expliquer!

   Calculons la colonne k de A pour déterminer U_k. Pour $i = 1, \ldots, k-1$ (U est triangulaire supérieure et $U_{kk} = 1$ est connu),

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= \sum_{\alpha=\max\{i,k\}}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha k} \quad \textbf{où } \max\{i,k\} = k \\
&= U_{ik} L_{kk} + \sum_{\alpha=k+1}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha k} \quad \textbf{où } U_{i\alpha} \in U_\alpha \textbf{ et } L_{\alpha k} \in \underline{L}_\alpha \textbf{ sont connues car } \alpha \geq k+1
\end{aligned}$$

   d'où on déduit

$$U_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left(A_{ik} - \sum_{\alpha=k+1}^{n} U_{i\alpha} L_{\alpha k} \right) \quad \forall i = 1, \ldots, k-1, \quad \textbf{si } L_{kk} \neq 0. \tag{4}$$

   On remarque que pour $i = k$, l'équation (4) est équivalente à $U_{kk} = 1$ d'après (3) (pour $j = k$).

   Finalement, les équation (3) et (4) permettent de déterminer entièrement $\underline{L}_k$ et U_k.

   La condition pour faire ce calcul est que le "pivot" $L_{kk} \neq 0$ pour $k = 2, \ldots, n$ ($k = 1$ n'est pas nécessaire ici).

   Remarque : les pivots de la factorisation $A = UL$ se retrouvent sur la diagonale de L. Ils sont tous utilisés pour calculer U_k (cf. (4)) sauf pour $k = 1$ (première colonne), car $U_{11} = 1$ est déjà connu. □

4. Montrer que si la factorisation $A = UL$ existe, alors elle est unique.

   Réponse : Supposons qu'il existe deux factorisations $A = UL = \tilde{U}\tilde{L}$. Rappelons qu'une matrice triangulaire supérieure M avec des termes diagonaux M_{ii} non-nuls est inversible, et que son inverse M^{-1} est une matrice triangulaire supérieure vérifiant $(M^{-1})_{ii} = 1/M_{ii}$. De plus le produit de deux matrices

triangulaires supérieures M et N est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux valent $(MN)_{ii} = M_{ii}N_{ii}$.

Idem pour les matrices triangulaires inférieures.

Donc U et $\tilde{L}$ sont inversibles et il vient :

$$UL = \tilde{U}\tilde{L} \iff L\tilde{L}^{-1} = U^{-1}\tilde{U},$$

où $L\tilde{L}^{-1}$ est triangulaire inférieure (comme produit de matrices triangulaires inférieures) et $U^{-1}\tilde{U}$ est triangulaire supérieure (comme produit de deux matrices triangulaires supérieures) et dont les termes diagonaux valent 1 (car les termes diagonaux de U^{-1} et de $\tilde{U}$ valent 1).

Donc finalement $U^{-1}\tilde{U}$ est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, donc est diagonale, avec 1 sur la diagonale : c'est I. Il vient :

$$L\tilde{L}^{-1} = U^{-1}\tilde{U} = I \iff L = \tilde{L} \textbf{ et } U = \tilde{U},$$

il y a donc unicité de la décomposition. □

5. Soient les matrices par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}.$$

On suppose que $M_{11} \in \mathcal{M}_{r_1,r_1}(\mathbb{R})$ et $M_{22} \in \mathcal{M}_{r_2,r_2}(\mathbb{R})$ et que $N_{11} \in \mathcal{M}_{s_1,s_1}(\mathbb{R})$ et $N_{22} \in \mathcal{M}_{s_2,s_2}(\mathbb{R})$.

(a) Donner les conditions sur r_1, r_2, s_1 et s_2 pour que le produit par blocs ait un sens. Donner également les tailles de M_{12} et de N_{21}.

Réponse : il faut que le produit matriciel de M_{ik} par N_{kj} soit possible, donc $r_1 = s_1$ et $r_2 = s_2$. Par ailleurs $M_{12} \in \mathcal{M}_{r_1,r_2}(\mathbb{R})$ et $N_{21} \in \mathcal{M}_{s_2,s_1}(\mathbb{R})$. □

(b) Calculer le produit MN par blocs.

Réponse :

$$MN = \begin{bmatrix} M_{11}N_{11} + M_{12}N_{21} & M_{12}N_{22} \\ M_{22}N_{21} & M_{22}N_{22} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

□

(c) Pour $k = 0, \ldots, n-1$, on appelle $[A]_{n-k}$ les sous matrices de A constituées des A_{ij} tels que $i = n-k, \ldots, n$ et $j = n-k, \ldots, n$. Quelle est la taille de $[A]_{n-k}$? Que valent $[A]_{n-k}$ pour $k = 0$ et $k = n-1$?

Réponse : $[A]_{n-k}$ est la partie inférieure droite de A :

$$[A]_{n-k} = \begin{bmatrix} A_{n-k,n-k} & A_{n-k,n-k+1} & \cdots & A_{n-k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,n-k} & A_{n,n-k+1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{k+1,k+1}(\mathbb{R}),$$

et donc pour $k = 0$ et $k = n-1$:

$$[A]_n = [A_{nn}] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}), \quad [A]_1 = A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}).$$

□

(d) À partir d'une décomposition par blocs des matrices U et L, écrire l'expression de $[A]_{n-k}$.

Réponse : pour $k = 0, \ldots, n-1$, on décompose $A = UL$ en blocs de taille $r_1 = n-k-1$ et $r_2 = k+1$ de façon que

$$A = UL \iff \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{U}_{11} & \widetilde{U}_{12} \\ 0 & \widetilde{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & 0 \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} \end{bmatrix} \quad \textbf{où } \widetilde{A}_{ij}, \widetilde{U}_{ij}, \tilde{L}_{ij} \in \mathcal{M}_{r_1,r_2}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & [A]_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{U}_{11} & \widetilde{U}_{12} \\ 0 & [U]_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & 0 \\ \tilde{L}_{21} & [L]_{n-k} \end{bmatrix},$$

ce qui implique d'après le calcul par blocs (cf. (5)) que

$$[A]_{n-k} = [U]_{n-k}[L]_{n-k}.$$

□

(e) Déduire de la question précédente que si la factorisation $A = UL$ est faisable, alors $[A]_{n-k}$ est inversible, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

Réponse : si la factorisation $A = UL$ est faisable, alors pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, on peut effectuer le produit par blocs ci-dessus et donc $[A]_{n-k} = [U]_{n-k}[L]_{n-k}$. On obtient :

$$\det([A]_{n-k}) = \det([U]_{n-k}) \det([L]_{n-k}) = \det([L]_{n-k}) = \prod_{i=n-k}^{n} L_{ii}$$

car $[U]_{n-k}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et $[L]_{n-k}$ est triangulaire inférieure. Comme les L_{ii} doivent être non-nuls pour effectuer la factorisation $A = UL$, le déterminant de $[A]_{n-k}$ doit être non-nul et donc la matrice $[A]_{n-k}$ est inversible pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

Remarque : pour $k = n-1$ (première colonne), on a vu que la condition $L_{11} \neq 0$ n'était pas strictement nécessaire (cf. remarque et (4)). Toutefois comme $\det(A) = \det([A]_1) = \det([U]_1)\det([L]_1) = \det(U)\det(L) = \prod_{i=1}^{n} L_{ii}$, le fait que A soit inversible (par hypothèse) implique que $L_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et en particulier pour L_{11}. □

6. Écrire une fonction scilab : `function [U, L] = UL(A)` qui effectue la factorisation $A = UL$. (Un bonus sera accordé pour une version vectorielle du programme).

Réponse : l'algorithme est celui de Doolittle inversé (en partant du bas). Il est donné par les équations (3) et (4). Voici un exemple d'implémentation (utilisant le produit matrice vecteur) : □

```
function [U, L] = UL(A)
tol = 1e-12
n=size(A,1)
if ( size(A) ~= [n, n] )
  printf( "size(A)= %d, %d", size(A,1), size(A,2) );
  error('not a correct size')
end

L = zeros(n, n); U = eye(n, n); // initialisation
for k = n:-1:1 // boucle partant du bas
```

```
  // modification de la colonne Lk (utilise un bloc de L (bas a gauche))
  L(k, 1:k) = A(k, 1:k) - U(k, k+1:n) * L(k+1:n, 1:k);
  pivot = L(k,k);
  if ( abs( pivot ) < tol )
    if k > 1
      disp( pivot, [k,k]); error('Pivot nul');
    else // on ne retourne pas d'erreur si c'est le dernier pivot qui est nul
      warning("Dernier pivot nul, matrice de rang n-1"); return;
    end
  end
  // modification de la ligne Uk (rien n'est fait pour k=1)
  // (utilise un bloc de U (haut a droite))
  U(1:k-1, k) = ( A(1:k-1, k) - U(1:k-1, k+1:n) * L(k+1:n, k) )  / pivot;
end
endfunction
```

Il est possible de remplacer la modification de la colonne L_k par une boucle :

```
  for j = 1:k
    L(k, j) = A(k, j) - U(k, k+1:n) * L(k+1:n, j);
  end
```

ou même deux boucles :

```
  for j = 1:k
    s = 0
    for alpha = k+1:n
      s = s + U(k, alpha) * L(alpha, j);
    end
    L(k, j) = A(k, j) - s;
  end
```

Idem pour la modification de $\underline{U}_k$. Ces deux solutions sont acceptables, mais moins performantes sous scilab.

7. Écrire une fonction scilab : `function [x] = resol(A, b)` qui résout le système $Ax = b$ avec la factorisation UL. On suppose que l'on dispose des fonctions du TP2, qui ne seront donc pas réécrites ici.

   Réponse : en utilisant la factorisation, il vient :

$$Ax = b \iff U(Lx) = b \iff \begin{cases} Uy = b \\ Lx = y \end{cases}$$

□

```
function [x] = resol(A,b)
exec("UL.sci", -1); exec("solsup.sci", -1); exec("solinf.sci", -1);

[U, L] = UL(A);
  y = solsup(U, b);
  x = solinf(L, y);
endfunction
```

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit un entier $n \geq 1$ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers une limite $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que

$$\forall p = 1, 2, \ldots, \quad \|x_{p+1} - x_p\| \leq \lambda \|x_p - x_{p-1}\|.$$

On rappelle l'identité suivante : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda^i = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

1. Soit q un entier supérieur à p. Calculer une majoration de $\|x_q - x_p\|$ en fonction de $\|x_1 - x_0\|$ et des puissances de λ.

   Réponse : par récurrence immédiate :

   $$\|x_{p+1} - x_p\| \leq \lambda \|x_p - x_{p-1}\| \leq \lambda^2 \|x_{p-1} - x_{p-2}\| \leq \cdots \leq \lambda^p \|x_1 - x_0\|.$$

   Puis, comme $x_q - x_p = (x_q - x_{q-1}) + \cdots + (x_{p+2} - x_{p+1}) + (x_{p+1} - x_p)$, l'inégalité triangulaire et le résultat de la question précédente donne

   $$\|x_q - x_p\| \leq \left(\lambda^{q-1} + \cdots + \lambda^n\right) \|x_1 - x_0\|.$$

   Comme $0 < \lambda < 1$, on obtient

   $$\|x_q - x_p\| \leq \lambda^p \left(\sum_{i=0}^{q-1-p} \lambda^i\right) \|x_1 - x_0\| = \lambda^p \frac{1-\lambda^{q-p}}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

   □

2. En faisant alors tendre q vers l'infini, en déduire une majoration de l'erreur $\|\hat{x} - x_p\|$ en fonction de λ, p et $x_1 - x_0$.

   Réponse : On fixe p. Quand q tend vers l'infini, λ^{q-p} tend vers 0 (car $0 < \lambda < 1$) et x_q tend vers $\hat{x}$. Donc à la limite l'inégalité ci-dessus devient :

   $$\|\hat{x} - x_p\| \leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

   □

3. On suppose λ connu. Calculer une estimation du nombre d'itérations K pour lequel on est assuré que l'erreur relative $\frac{\|\hat{x}-x_p\|}{\|x_1-x_0\|}$ est inférieure à un $\varepsilon > 0$ donné.
   Application : on suppose que $\lambda = 1/2$ et on prend $\varepsilon = e^{-10}$, que vaut K ? (On prendra l'approximation $\ln(2) \approx 2/3$.)

   Réponse : si on a $\frac{\lambda^p}{1-\lambda} \leq \varepsilon$, on sera assuré que l'erreur relative est inférieure à ε.

   On en déduit que $p \ln(\lambda) \leq \ln(\varepsilon) + \ln(1-\lambda)$, soit

   $$p \geq \frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-\lambda)}{\ln(\lambda)}$$

   (car $\ln(\lambda) < 0$).

   Application numérique : on trouve : $p \geq \frac{-10+\ln(1/2)}{\ln(1/2)} = \frac{10+\ln(2)}{\ln(2)}$, et $K \geq \frac{10+2/3}{2/3} = \frac{32}{2} = 16$.

   Environ $K = 16$ itérations suffisent pour obtenir une erreur relative inférieur à $e^{-10} \approx 4\ 10^{-5}$. □