Chapitre 5 : Espaces euclidiens

Antoine Zurek

LMAC - UTC

1. Produit scalaire, norme et espace euclidien
2. Orthogonalité
3. Matrices orthogonales
4. Diagonalisation des matrices symétriques réelles
5. Matrice définie positive
6. Formes quadratiques

Table of contents

Définition du produit scalaire

Définition 5.1.1.

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. elle est bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1\rangle = \alpha_1\langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2\langle x_2, y_1\rangle,$$
$$\langle x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1\langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2\langle x_1, y_2\rangle,$$

2. elle est symétrique : $\forall x, y \in E$ on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
3. elle est définie positive :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Définition du produit scalaire

Définition 5.1.1.

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. elle est bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_1\rangle,$$
$$\langle x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2 \langle x_1, y_2\rangle,$$

2. elle est symétrique : $\forall x, y \in E$ on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
3. elle est définie positive :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Remarque : Si on montre d'abord la symétrie, il suffit alors de montrer la linéarité par rapport à la première variable pour obtenir la linéarité par rapport à la deuxième variable.

Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^\top y.$$

Proposition 5.1.1.

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et on a

$$\underbrace{\langle Ax, y \rangle}_{p.s.\,\mathbb{R}^m} = \underbrace{\langle x, A^\top y \rangle}_{p.s.\,\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Preuve. On a

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^\top y = x^\top A^\top y = x^\top (A^\top y) = \langle x, A^\top y \rangle.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 5.1.2.

Pour tout $x, y \in E$ on a

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \quad \text{ou} \quad |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

On a l'égalité si x et y sont colinéaires.

Preuve. À lire dans le poly.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 5.1.2.

Pour tout $x, y \in E$ on a

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \quad \text{ou} \quad |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

On a l'égalité si x et y sont colinéaires.

Preuve. À lire dans le poly.

Remarque. Pour $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\left(= ||x||\,||y||\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition de la norme

Définition 5.1.2.

On appelle norme sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \mapsto ||x||$ et possédant les propriétés suivantes :

1. $||x|| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).

Définition 5.1.3.

On appelle espace vectoriel normé un espace vectoriel réel muni d'une norme.

Définition de la norme

Définition 5.1.2.

On appelle norme sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \mapsto ||x||$ et possédant les propriétés suivantes :

1. $||x|| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,
2. $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).

Définition 5.1.3.

On appelle espace vectoriel normé un espace vectoriel réel muni d'une norme.

Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$.

- La norme 1 : $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- La norme 2 : $||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$,
- La norme ∞ : $||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Espace euclidien

Proposition 5.1.3.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

définit une norme sur E.

Remarque. À tout produit scalaire on peut associer une norme mais la réciproque est fausse (ex : norme 1 ou norme ∞ dans $\mathbb{R}^n$).

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire donc de la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.

Table of contents

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Définition 5.2.1.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.
2. Une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonale si $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.
3. une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthonormée ou orthonormale si elle est orthogonale et $||x_i|| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Si F est un s.e.v. de E, on appelle orthogonal de F dans E noté $F^\perp$, le s.e.v.

$$F^\perp = \{x \in E \ : \ \forall y \in F \ \langle x, y \rangle = 0\} \subset E.$$

Proposition 5.2.1.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien est une famille libre.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 5.2.2.

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors il existe une famille orthonormée $(y_1, \ldots, y_p)$ telle que

$$\mathrm{vect}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle = \mathrm{vect}\langle y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle \quad \forall k = 1, \ldots, p.$$

Preuve. Voir poly, la construction est à lire et à comprendre !

Théorème 5.2.1.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un s.e.v. de E alors

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Table of contents

Définition et caractérisation des matrices orthogonales

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker, à savoir $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs pour $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on note Q_i la colonne i de Q.

Définition 5.3.1.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on dit que Q est orthogonale si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $(Q_i)^\top Q_j = \delta_{ij}$.

Remarque. En utilisant le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, on voit que les colonnes de Q sont orthogonales 2 à 2 et chaque colonne est de norme 1, i.e., les colonnes sont orthonormées.

Proposition 5.3.1 et 5.3.2.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ alors

1. Q est orthogonale $\Leftrightarrow Q^\top Q = I_n$.
2. Q est orthogonale $\Leftrightarrow Q^{-1} = Q^\top$. On en déduit que son déterminant est égal à ± 1.

Matrice de passage entre deux bases orthonormées et propriétés des matrices orthogonales(1)

Proposition 5.3.3.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.

Proposition 5.3.4.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale alors

1. $Q^\top$ est orthogonale,
2. si $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est orthogonale alors PQ est orthogonale.

Preuve 1. Si Q est orthogonale alors $Q^\top Q = I_n$, donc Q est l'inverse de $Q^\top$ donc $QQ^\top = I_n$ et ainsi $Q^\top$ est orthogonale.
Preuve 2. $(PQ)^\top PQ = Q^\top P^\top PQ = Q^\top I_n Q = Q^\top Q = I_n$, donc PQ est orthogonale.

Propriétés des matrices orthogonales(2)

Proposition 5.3.5.

Lien entre matrice orthogonale, norme et produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

1. Une matrice Q est orthogonale ssi elle conserve la norme des vecteurs, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $||x|| = ||Qx||$ où $||\cdot||$ représente la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$.
2. Une matrice Q est orthogonale ssi elle conserve le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, i.e., pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$ alors $\langle x, y\rangle = \langle Qx, Qy\rangle$.

Preuve 1. Si Q est orthogonale alors

$$||Qx||^2 = \langle Qx, Qx\rangle = (Qx)^\top Qx = x^\top Q^\top Qx = x^\top x = ||x||^2.$$

On admet la réciproque.

Preuve 2. Si Q est orthogonale alors pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y\rangle.$$

Pour la réciproque on utilise l'équivalence précédente.

Table of contents

Matrices symétriques réelles et diagonalisation

Objectif. Mq une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Proposition 5.4.1.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique ($A^\top = A$), si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres réelles distinctes et si on note y_1 et y_2 deux vecteurs propres réels associés, alors y_1 et y_2 sont orthogonaux.

Théorème 5.4.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors :

1. toutes les v.p. de A sont réelles,
2. il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée des vecteurs propres de A (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$),
3. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^\top AP$ soit une matrice diagonale.

Table of contents

Définition et exemples

Définition 5.5.1.

On dit que $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique est semi-définie positive si

$$x^\top A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit qu'elle est définie positive si, de plus,

$$x^\top A x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Exemple 1. La matrice suivante est semi-définie positive

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. La matrice suivante est définie positive

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Première propriété

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est définie positive alors $(x, y) \mapsto x^\top Ay$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.5.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Si A est définie positive alors $a_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
2. Si A est semi-définie positive alors $a_{ii} \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Attention, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.
Exemple. Le matrice symétrique suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

n'est pas définie positive !

Caractérisation importante

Proposition 5.5.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. A est définie positive ssi toutes ses v.p. sont strictement positives.
2. A est semi-définie positive ssi toutes ses v.p. sont positives ou nulles.

Exemple. Le matrice symétrique suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

est définie positive.

Proposition 5.5.3.

Une matrice symétrique définie positive est inversible.

Table of contents

Définition d'une forme quadratique

Définition 5.5.2.

On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ un polynôme de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Proposition 5.5.4.

q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ssi il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique vérifiant

$$q(x) = x^\top A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Forme quadratique définie positive

Définition 5.5.3.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $q(x) = x^\top Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que

- q est définie positive si A est définie positive,
- q est semi-définie positive si A est semi-définie positive.

Remarque. Ainsi q est définie positive ssi $q(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$.

Question. Soit

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

La forme quadratique q est-elle définie positive ?

Lire et comprendre dans le poly la méthode de réduction de Gauss d'une forme quadratique !