Chapitre 5 : Espaces euclidiens

Antoine Zurek
Vincent Martin

LMAC - UTC

1. Produit scalaire, norme et espace euclidien
2. Orthogonalité
3. Matrices orthogonales
4. Diagonalisation des matrices symétriques réelles
5. Matrice définie positive
6. Formes quadratiques
7. Exemple de famille orthonormée de polynômes

Table of contents

Définition du produit scalaire

Définition 5.1.1.

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. elle est bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1 \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_1 \rangle,$$
$$\langle x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_1, y_2 \rangle,$$

2. elle est symétrique : $\forall x, y \in E$ on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
3. elle est définie positive :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Définition du produit scalaire

Définition 5.1.1.

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. elle est bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_1\rangle,$$
$$\langle x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1\rangle + \alpha_2 \langle x_1, y_2\rangle,$$

2. elle est symétrique : $\forall x, y \in E$ on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
3. elle est définie positive :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x\rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Remarque 1 : Si on montre d'abord la symétrie, il suffit alors de montrer la linéarité par rapport à la première variable pour obtenir la linéarité par rapport à la deuxième variable.

Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$

- Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y.$$

Proposition 5.1.1.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et on a

$$\underbrace{\langle y, Ax\rangle}_{p.s.\ \mathbb{R}^n} = \underbrace{\langle A^T y, x\rangle}_{p.s.\ \mathbb{R}^p}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. On a (avec $(A^T)^T = A$ et $(AB)^T = B^T A^T$)

$$\langle y, Ax\rangle = y^T(Ax) = (y^T A)x = (A^T y)^T x = \langle A^T y, x\rangle.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 5.1.2.

Pour tout $x, y \in E$ on a

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \quad \text{ou} \quad |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

On a l'égalité si x et y sont colinéaires (*i.e.* (x, y) est liée).

Preuve. À lire dans le poly.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : exemples

- Pour $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\,(= \|x\|_2\,\|y\|_2)\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- Pour l'espace des fonctions réelles et continues sur $[0, 1]$ ($\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$), muni du PS : $\langle f, g\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt$, CS : $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$:

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 g(t)^2 dt}\,(= \|f\|_2\,\|g\|_2)\,.$$

Définition de la norme

Définition 5.1.2.

On appelle norme sur un espace vectoriel réel E, une application de E dans $\mathbb{R}$ notée $x \mapsto \|x\|$ et possédant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$, (positivité)
2. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$, (définie)
3. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$,
4. $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inég. triangulaire).

Remarque : (1. et 2.) est équivalent à :
$\forall x \in E,\ x \neq 0 \implies \|x\| > 0$.

Définition 5.1.3.

On appelle espace vectoriel normé un espace vectoriel réel muni d'une norme.

Exemples de normes

Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$.

- La norme 1 : $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- La norme 2 : $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
  (associée au PS ususel : $\langle x, y \rangle$),
- La norme ∞ : $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Exemples de normes

Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$.

- La norme 1 : $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- La norme 2 : $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
  (associée au PS ususel : $\langle x, y \rangle$),
- La norme ∞ : $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Exemples de normes sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$:

- La norme 1 : $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$,
- La norme 2 : $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$
  (associée au PS : $\langle f, g \rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt$),
- La norme ∞ : $\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Norme euclidienne

Proposition 5.1.3.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E.
Elle est notée $\| \cdot \|_2$ (norme euclidienne ou norme 2).

Remarque. À tout produit scalaire on peut associer une norme mais la réciproque est fausse (ex : norme 1 ou norme ∞ dans $\mathbb{R}^n$).

Norme euclidienne

Proposition 5.1.3.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, alors l'application

$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E.
Elle est notée $\| \cdot \|_2$ (norme euclidienne ou norme 2).

Remarque. À tout produit scalaire on peut associer une norme mais la réciproque est fausse (ex : norme 1 ou norme ∞ dans $\mathbb{R}^n$).

Cauchy-Schwarz s'exprime alors : pour tout $x, y \in E$,

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \, \|y\|_2^2 \quad \text{ou} \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

Espace euclidien

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, donc de la norme associée à ce produit scalaire.

Espace euclidien

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, donc de la norme associée à ce produit scalaire.

- Exemple. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.

Espace euclidien

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, donc de la norme associée à ce produit scalaire.

- Exemple. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.
- Contre exemple. $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas un espace euclidien.

Espace euclidien

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, donc de la norme associée à ce produit scalaire.

- Exemple. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.
- Contre exemple. $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas un espace euclidien.
- Contre exemple. $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}))$ muni du PS $\langle f, g\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt$, n'est pas un espace euclidien.

Espace euclidien

Définition 5.1.4.

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, donc de la norme associée à ce produit scalaire.

- Exemple. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.
- Contre exemple. $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas un espace euclidien.
- Contre exemple. $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}))$ muni du PS $\langle f, g\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)g(t)dt$, n'est pas un espace euclidien.
- Exemple. $\mathcal{P}_n$ (polynômes de degré $\leq n$) muni du PS $\langle p, q\rangle \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 p(t)q(t)dt$ est un espace euclidien.

Espace euclidien : égalité fondamentale

Pour tous x, y dans E euclidien, on a :

$$\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2.$$

Cela provient de la symétrie et de la bilinéarité du PS.

$\longrightarrow$ Géométrie euclidienne :

Pythagore

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux ssi

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0 \iff \|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2.$$

Table of contents

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux

Définition 5.2.1.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

1. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux ssi $\langle x, y \rangle = 0$.
2. Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ est orthogonale ssi $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.
3. Une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_q)$ est orthonormée ou orthonormale ssi elle est orthogonale et $\|x_i\|_2 = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$.
4. Si F est un s.e.v. de E, on appelle orthogonal de F dans E noté $F^\perp$, le s.e.v.

$$F^\perp = \{x \in E \,:\, \forall y \in F \; \langle x, y \rangle = 0\} \subset E.$$

4. Il faut montrer que $F^\perp$ est bien un seV.

Un peu de géométrie 1)

Proposition 5.2.1.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien est une famille libre.

Preuve : soit $p \geq 1$, on note $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ les vecteurs non nuls orthogonaux.
Soit $(\lambda_i)_{i=1,\dots,p}$ dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$. Alors, pour un j fixé dans $\{1,\dots,p\}$, on prend le produit scalaire par x_j. Par linéarité à gauche, on a :
$\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = \langle 0, x_j \rangle = 0$, car les $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ sont orthogonaux deux à deux.
On obtient donc : $\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = 0$. On déduit que $\lambda_j = 0$, car $x_j \neq 0$ et donc $\langle x_j, x_j \rangle \neq 0$.

La famille est donc libre.

Un peu de géométrie 2)

Soit E euclidien. Soient F et G deux seV de E. On a :

$$\{0\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0\},$$
$$F \cap F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad F = (F^\perp)^\perp,$$
$$F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp,$$
$$(F+G)^\perp = F^\perp \bigcap G^\perp.$$

Preuve : voir ex. TD 4. La preuve de $(F^\perp)^\perp \subset F$ nécessite un résultat ultérieur (voir $E = F \oplus F^\perp$).

Un peu de géométrie 2)

Soit E euclidien. Soient F et G deux seV de E. On a :

$$\{0\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0\},$$
$$F \cap F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad F = (F^\perp)^\perp,$$
$$F \subset G \Longleftrightarrow G^\perp \subset F^\perp,$$
$$(F+G)^\perp = F^\perp \bigcap G^\perp.$$

Preuve : voir ex. TD 4. La preuve de $(F^\perp)^\perp \subset F$ nécessite un résultat ultérieur (voir $E = F \oplus F^\perp$).

Égalité du parallèlogramme, lien norme/PS

Pour tout x et $y \in E$, on a

$$2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 = \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2,$$
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2\right).$$

Preuve : découle de $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2$.

Exemple en dimension 2

Soit F seV de E. Il y a plusieurs supplémentaires de F, mais on peut prendre un supplémentaire orthogonal à F.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose (faites un dessin!)

$$\begin{array}{rcl} F & = & \mathrm{Vect}\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \\ G_1 & = & \mathrm{Vect}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, G_2 = \mathrm{Vect}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, G_3 = \mathrm{Vect}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \ldots \\ H & = & \mathrm{Vect}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle \end{array}$$

On a $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2 = F \oplus G_3 = \ldots$ et
$E = F \oplus H$, et $H = F^{\perp}$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 5.2.2.

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors il existe une famille orthonormée $(y_1, \ldots, y_p)$ telle que

$$\mathrm{Vect}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle = \mathrm{Vect}\langle y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle \quad \forall k = 1, \ldots, p.$$

Algorithme de Gram-Schmidt :

- $k = 1$: $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- pour $k \geq 1$ $\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, y_j \rangle y_j, \\ y_{k+1} = \frac{\tilde{y}_{k+1}}{\|\tilde{y}_{k+1}\|}. \end{cases}$

Preuve : voir poly, la construction est à lire et à comprendre !

Note : pour tous $i = 1, \ldots, k$, $\tilde{y}_{k+1} \perp y_i$, car, par bilinéarité du PS, $\langle \tilde{y}_{k+1}, y_i \rangle = \langle x_{k+1}, y_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, y_j \rangle \langle y_j, y_i \rangle = \langle x_{k+1}, y_i \rangle - \langle x_{k+1}, y_i \rangle = 0$, puisque $\langle y_j, y_i \rangle = \delta_{i,j}$.

Décomposition d'un espace euclidien

Théorème 5.2.1.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F un s.e.v. de E, alors

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Preuve : si $F = \{0\}$, on a toujours $E = \{0\} \oplus E$ et $\{0\}^{\perp} = E$. OK!
Sinon, soit $\mathcal{F} \overset{\text{déf.}}{=} (f_i)_{i=1,\ldots,p}$ une base de F (donc $1 \leq p = \dim(F) \leq n$).
C'est une famille libre de E, on la complète (thm de la base incomplète) en $\tilde{\mathcal{F}} = (f_i)_{i=1,\ldots,n}$.
On orthonormalise $\tilde{\mathcal{F}}$ via le procédé de Gram-Schmidt en $\tilde{\mathcal{X}} = (x_i)_{i=1,\ldots,n}$. On a donc $\mathrm{Vect}\langle\tilde{\mathcal{X}}\rangle = \mathrm{Vect}\langle\tilde{\mathcal{F}}\rangle = E$, donc $\tilde{\mathcal{X}}$ est une base (famille libre et génératrice) orthonormée de E.
On note $\mathcal{X} = (x_i)_{i=1,\ldots,p}$. On a aussi $\mathrm{Vect}\langle\mathcal{X}\rangle = \mathrm{Vect}\langle\mathcal{F}\rangle = F$, et en posant $G \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Vect}\langle(x_i)_{i=p+1,\ldots,n}\rangle$, on a $E = F \oplus G$ (facile à vérifier car $\tilde{\mathcal{X}}$ est une base).
Il reste à vérifier que $G = F^{\perp}$.

Décomposition d'un espace euclidien ($E = F \oplus F^\perp$, suite)

Preuve : (suite) Il reste à vérifier que $G = F^\perp$, par double inclusion.

$G \subset F^\perp$. Soit $g \in G$, donc il existe des scalaires $(\beta_k)_{k=p+1,\dots,n}$ tels que g s'écrit $g = \sum_{k=p+1}^n \beta_k x_k$. Pour tout élément x_i ($i \leq p$) de la base $\mathcal{X}$ de F, on a
$\langle x_i, g\rangle = \sum_{k=p+1}^n \beta_k \langle x_i, x_k\rangle = 0$,
car x_i est orthogonal à tous les x_k (car $i < k$). Donc par linéarité à gauche du PS, g est orthogonal à tout f de F : $G \subset F^\perp$.

$F^\perp \subset G$. Soit $x \in F^\perp$. Comme $x \in E$, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ tels que x s'écrit dans la base $\tilde{\mathcal{X}}$ comme : $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Comme x est orthogonal à $F = \mathrm{Vect}\langle\mathcal{X}\rangle$, il est orthogonal à tout x_j pour $j \leq p$. Donc $0 = \langle x, x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$. Les p premières composantes de x sont nulles. Finalement, x se réduit à $x = \sum_{i=p+1}^n \alpha_i x_i$ qui est dans $G = \mathrm{Vect}\langle (x_i)_{i=p+1,\dots,n}\rangle$.

Donc $G = F^\perp$ et $E = F \oplus F^\perp$.

(Pour la seconde inclusion, on aurait pu noter que $E = F \oplus G \subset F + F^\perp \subset E$, donc $E = F + F^\perp$. Il ne restait plus qu'à se rappeler que $F \cap F^\perp = \{0\}$.)

Table of contents

Remarque sur les matrices symétriques

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^T est inversible et on a :
$(A^T)^{-1} = (A^{-1}) \overset{\text{déf.}}{=} A^{-T}$.

Définition des matrices orthogonales

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker, à savoir $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs pour $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on note Q_i la colonne i de Q.

Définition 5.3.1.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on dit que Q est orthogonale si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $(Q_i)^T Q_j = \delta_{ij}$.

Remarque. En utilisant le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, on voit que les colonnes de Q sont orthogonales 2 à 2 et chaque colonne est de norme 1, *i.e.*, les colonnes sont orthonormées.

Définition des matrices orthogonales

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker, à savoir $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs pour $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on note Q_i la colonne i de Q.

Définition 5.3.1.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on dit que Q est orthogonale si pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on a $(Q_i)^T Q_j = \delta_{ij}$.

Remarque. En utilisant le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, on voit que les colonnes de Q sont orthogonales 2 à 2 et chaque colonne est de norme 1, *i.e.*, les colonnes sont orthonormées.

Exemple : $n = 3$

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_1^T Q_2 & Q_1^T Q_3 \\ Q_2^T Q_1 & Q_2^T Q_2 & Q_2^T Q_3 \\ Q_3^T Q_1 & Q_3^T Q_2 & Q_3^T Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Caractérisation et propriétés des matrices orthogonales

Proposition 5.3.1 et 5.3.2.

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, alors

1. Q est orthogonale $\Leftrightarrow Q^T Q = I_n$ (rappel : Q est carrée).
2. Q est orthogonale $\Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T$. On en déduit que son déterminant est égal à ± 1.

Matrice de passage entre deux bases orthonormées

Proposition 5.3.3.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.

Preuve : voir dans le poly.

Propriétés des matrices orthogonales(1)

Proposition 5.3.4.

Soit E un espace euclidien et soit $P, Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors

1. I_n est orthogonale,
2. si Q est orthogonale, alors $Q^{-1} = Q^T$ est orthogonale,
3. si P et Q sont orthogonales, alors PQ est orthogonale.

Preuve 1. On a $I_n I_n = I_n$ et $I_n^T = I_n$, donc $I_n^{-1} = I_n^T$.
Preuve 2. Si Q est orthogonale, alors $Q^T Q = I_n$, donc Q est l'inverse de Q^T donc $QQ^T = I_n$ et ainsi Q^T est orthogonale.
Preuve 3. $(PQ)^T PQ = Q^T P^T PQ = Q^T I_n Q = Q^T Q = I_n$, donc PQ est orthogonale.

Propriétés des matrices orthogonales(1)

Proposition 5.3.4.

Soit E un espace euclidien et soit $P, Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors

1. I_n est orthogonale,
2. si Q est orthogonale, alors $Q^{-1} = Q^T$ est orthogonale,
3. si P et Q sont orthogonales, alors PQ est orthogonale.

Preuve 1. On a $I_n I_n = I_n$ et $I_n^T = I_n$, donc $I_n^{-1} = I_n^T$.
Preuve 2. Si Q est orthogonale, alors $Q^T Q = I_n$, donc Q est l'inverse de Q^T donc $QQ^T = I_n$ et ainsi Q^T est orthogonale.
Preuve 3. $(PQ)^T PQ = Q^T P^T PQ = Q^T I_n Q = Q^T Q = I_n$, donc PQ est orthogonale.

Remarque Cela confère une structure de sous-groupe à l'ensemble des matrices orthogonales.

Propriétés des matrices orthogonales(2)

Proposition 5.3.5.

Lien entre matrice orthogonale, norme et produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ ($\|\cdot\|_2$ représente la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$).

1. Une matrice Q est orthogonale ssi elle conserve la norme des vecteurs :
   Q orthogonale $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Qx\|_2 = \|x\|_2$.
2. Une matrice Q est orthogonale ssi elle conserve le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$:
   Q orthogonale $\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$.

Preuve 1. Si Q est orthogonale, alors

$$\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx\rangle = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T x = \|x\|_2^2.$$

On admet la réciproque.

Preuve 2. Si Q est orthogonale, alors pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T y = \langle x, y\rangle.$$

Pour la réciproque on utilise l'équivalence précédente.

Propriétés des matrices orthogonales(3)

On dit qu'une matrice orthogonale est une isométrie (elle conserve la norme euclidienne).

Conséquence

Proposition

Soit $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, alors ses valeurs propres sont de module 1 (dans $\mathbb{C}$).

Preuve : voir dans le poly.

Table of contents

Matrices symétriques réelles et diagonalisation

Objectif. Mq une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Proposition 5.4.1.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique ($A^T = A$), si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres réelles distinctes et si on note y_1 et y_2 deux vecteurs propres réels associés, alors y_1 et y_2 sont orthogonaux.

Preuve : voir dans le poly.

Matrices symétriques réelles et diagonalisation

Théorème 5.4.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, alors :

1. toutes les v.p. de A sont réelles,
2. il existe une base orthonormée (BON) de $\mathbb{R}^n$ constituée des vecteurs propres de A (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$),
3. A est diagonalisable dans une BON dans $\mathbb{R}$:
   il existe P orthogonale et D diagonale telles que
   $D = P^T A P = P^{-1} A P$.

Preuve : voir dans le poly.

Table of contents

Rappel de produit matriciel

- soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$x^T A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i A_{i,j} y_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} y_j A_{i,j} x_i = y^T A^T x \quad \in \mathbb{R}.$$

- soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ **symétrique**, x et $y \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x^T A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{j,i} y_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} y_k A_{k,l} x_l = y^T A x \quad \in \mathbb{R}.$$

- Pour A symétrique, on définit une forme quadratique $q\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$q(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} x_i x_j.$$

Définition et exemples

Définition 5.5.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ($A^T = A$). Alors

$$A \ \text{ définie positive} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^T A x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^T A x = 0 \implies x = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ : \ x^T A x > 0,$$

et :

$$A \ \text{ semi-définie positive} \quad \Longleftrightarrow \quad \{ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^T A x \geq 0.$$

Exemple 1. La matrice suivante est semi-définie positive

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. La matrice suivante est définie positive

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Première propriété

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, alors $(x, y) \mapsto x^T Ay$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.5.1. (Conditions nécessaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Si A est définie positive, alors $a_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
2. Si A est semi-définie positive, alors $a_{ii} \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Attention, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Exemple. Le matrice symétrique suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

n'est pas définie positive !

Caractérisation importante

Proposition 5.5.2. (CNS pour être DP et semi-DP)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. A est définie positive ssi toutes ses v.p. sont strictement positives.
2. A est semi-définie positive ssi toutes ses v.p. sont positives ou nulles.

Caractérisation importante

Proposition 5.5.2. (CNS pour être DP et semi-DP)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. A est définie positive ssi toutes ses v.p. sont strictement positives.
2. A est semi-définie positive ssi toutes ses v.p. sont positives ou nulles.

Preuve : il existe P orthogonale et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP = P^TAP$, équivalent à $A = PDP^{-1} = PDP^T$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} x^TAx &= x^T(PDP^T)x = (x^TP)D(P^Tx) = (P^Tx)^TDP^Tx \\ &= z^TDz = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2, \quad \text{où } z \overset{\text{déf.}}{=} P^Tx = P^{-1}x. \end{aligned}$$

(z contient les composantes de x dans la BON des vecteurs propres.
Revoir les changements de bases.)

Caractérisation importante (suite)

Proposition 5.5.2. (CNS pour être DP et semi-DP)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique.

1. A est définie positive ssi toutes ses v.p. sont strictement positives.
2. A est semi-définie positive ssi toutes ses v.p. sont positives ou nulles.

Preuve : (suite) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a donc $x^T Ax = z^T Dz = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$, où $z \overset{\text{déf.}}{=} P^T x = P^{-1} x$ (ou encore $x = Pz$).

- (semi-DP): $\forall x,\ x^T Ax \geq 0 \iff \forall z, z^T Dz \geq 0 \iff \forall i, \lambda_i \geq 0$.
  En effet, si $x^T Ax \geq 0$, alors en prenant $z = e_j \iff x = Pe_j = y_j$ ($j^{\text{ème}}$ vecteur propre), on obtient $x^T Ax = e_j^T De_j = \lambda_j \geq 0$.
  Réciproque : si tous les λ_j sont ≥ 0, alors $x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$ est toujours ≥ 0.
- (DP): $\forall x \neq 0,\ x^T Ax > 0 \iff \forall z \neq 0, z^T Dz > 0 \iff \forall i, \lambda_i > 0$.
  En effet, en prenant $x = Pe_j = y_j \neq 0$, on a $x^T Ax = \lambda_j > 0$.
  Réciproque : si tous les λ_j sont > 0, alors $x^T Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$ est toujours ≥ 0, et sera nul ssi $z = 0$ ssi $x = P^{-1} z = 0$ (P est inversible).

Matrice DP: exemple et conséquence

Exemple. Le matrice symétrique suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

est définie positive.

Proposition 5.5.3.

Une matrice symétrique définie positive est inversible.

Table of contents

Définition d'une forme quadratique

Définition 5.5.2.

On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ un polynôme de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Proposition 5.5.4.

q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ssi il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique vérifiant

$$q(x) = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition d'une forme quadratique

Définition 5.5.2.

On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ un polynôme de la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Proposition 5.5.4.

q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ ssi il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symétrique vérifiant

$$q(x) = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lien entre A et les α_i, β_{ij} :
$A_{ii} = \alpha_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ et $A_{ij} = A_{ji} = \frac{1}{2}\beta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, si $i < j$.

Forme quadratique définie positive

Définition 5.5.3.

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que

- q est définie positive si A est définie positive,
- q est semi-définie positive si A est semi-définie positive.

Remarque. Ainsi q est définie positive ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q(x) > 0$.

Question. Soit

$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

La forme quadratique q est-elle définie positive ?

Relire et comprendre dans le poly la méthode de réduction de Gauss d'une forme quadratique !

Lien entre forme quadratique et forme bilinéaire symétrique

- À une forme bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on peut associer une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$q(x) = \phi(x, x).$$

- À une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on peut associer une forme bilinéaire symétrique par $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, par

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x + y) - q(x) - q(y)\right).$$

- q est DP ssi ϕ est DP (donc définit un produit scalaire).

Lien entre forme quadratique et forme bilinéaire symétrique

- À une forme bilinéaire symétrique $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on peut associer une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$q(x) = \phi(x, x).$$

- À une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on peut associer une forme bilinéaire symétrique par $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, par

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2} \left(q(x + y) - q(x) - q(y) \right).$$

- q est DP ssi ϕ est DP (donc définit un produit scalaire).

Si $q(x) = x^T A x$, alors
$q(x + y) - q(x) - q(y) = (x + y)^T A(x + y) - x^T A x - y^T A y =$
$y^T A x + x^T A y = 2x^T A y = 2\phi(x, y)$, où A, symétrique, est la matrice associée à ϕ.

Forme quadratique : exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} q(x) &= x^T A x = \begin{cases} \quad 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ +1x_2x_1 + 2x_2^2 + 1x_2x_3 \\ +2x_3x_1 + 1x_3x_2 + 9x_3^2 \end{cases} \\ &= 1x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 \\ &\quad +2\left(1x_1x_2 + 2x_1x_3 + 1x_2x_3\right) \end{aligned}$$

Forme quadratique : exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} q(x) & = & x^T A x = \left\{ \begin{array}{r} 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ +1x_2x_1 + 2x_2^2 + 1x_2x_3 \\ +2x_3x_1 + 1x_3x_2 + 9x_3^2 \end{array} \right. \\ & = & 1x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 \\ & & +2\left(1x_1x_2 + 2x_1x_3 + 1x_2x_3\right) \end{array}$$

Décomposition de Gauss en carrés :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^2 + 2\alpha x_1 y & = & (x_1 + \alpha y)^2 - \alpha^2 y^2 \\ x_1x_2 + x_1 f_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2 f_2(x_3, \ldots, x_n) & = & (x_1 + f_2)(x_2 + f_1) - f_1 f_2 \\ \ell_1 \ell_2 & = & \frac{1}{4}\left((\ell_1 + \ell_2)^2 - (\ell_1 - \ell_2)^2\right). \end{array} \right.}$$

Forme quadratique : exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q(x) &= x^T A x = \begin{cases} \quad 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ +1x_2x_1 + 2x_2^2 + 1x_2x_3 \\ +2x_3x_1 + 1x_3x_2 + 9x_3^2 \end{cases} \\ &= 1x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 \\ &\quad +2\left(1x_1x_2 + 2x_1x_3 + 1x_2x_3\right) \end{aligned}$$

Décomposition de Gauss en carrés :

$$\boxed{\begin{cases} x_1^2 + 2\alpha x_1 y &= (x_1 + \alpha y)^2 - \alpha^2 y^2 \\ x_1x_2 + x_1 f_1(x_3, \dots, x_n) + x_2 f_2(x_3, \dots, x_n) &= (x_1 + f_2)(x_2 + f_1) - f_1 f_2 \\ \ell_1 \ell_2 &= \frac{1}{4}\left((\ell_1 + \ell_2)^2 - (\ell_1 - \ell_2)^2\right). \end{cases}}$$

On trouve

$$\begin{aligned} q(x) = x^T A x &= 1(\underbrace{1x_1 + 1x_2 + 2x_3}_{y_1})^2 + 1(\underbrace{1x_2 - 1x_3}_{y_2})^2 + 4(\underbrace{1x_3}_{y_3})^2 \\ &= 1y_1^2 + 1y_2^2 + 4y_3^2 \quad \geq 0. \end{aligned}$$

Forme quadratique : exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q(x) &= x^T A x = \left\{ \begin{array}{r} 1x_1^2 + 1x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ +1x_2x_1 + 2x_2^2 + 1x_2x_3 \\ +2x_3x_1 + 1x_3x_2 + 9x_3^2 \end{array} \right. \\ &= 1x_1^2 + 2x_2^2 + 9x_3^2 \\ &\quad +2\left(1x_1x_2 + 2x_1x_3 + 1x_2x_3\right) \end{aligned}$$

Décomposition de Gauss en carrés :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^2 + 2\alpha x_1 y &=& (x_1 + \alpha y)^2 - \alpha^2 y^2 \\ x_1x_2 + x_1 f_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2 f_2(x_3, \ldots, x_n) &=& (x_1 + f_2)(x_2 + f_1) - f_1 f_2 \\ \ell_1 \ell_2 &=& \frac{1}{4}\left((\ell_1 + \ell_2)^2 - (\ell_1 - \ell_2)^2\right). \end{array} \right.}$$

On trouve

$$\begin{aligned} q(x) = x^T A x &= 1(\underbrace{1x_1 + 1x_2 + 2x_3}_{y_1})^2 + 1(\underbrace{1x_2 - 1x_3}_{y_2})^2 + 4(\underbrace{1x_3}_{y_3})^2 \\ &= 1y_1^2 + 1y_2^2 + 4y_3^2 \quad \geq 0. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} q(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y_3 = y_2 = y_1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_3 = x_2 = x_1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Donc q DP.

Forme quadratique : signature 1)

Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$:

- n_+ est le nombre de carrés linéairement indépendants > 0,
- n_- est le nombre de carrés linéairement indépendants < 0,
- $n_0 = n - (n_+ + n_-)$ est le nombre de "zéros".

(n_+, n_-) est la signature de q.

La signature ne dépend pas du choix de la réduction de Gauss en carrés (non démontré).

(On prend parfois comme définition de signature : (n_+, n_-, n_0)).

Forme quadratique : signature 1)

Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$:

- n_+ est le nombre de carrés linéairement indépendants > 0,
- n_- est le nombre de carrés linéairement indépendants < 0,
- $n_0 = n - (n_+ + n_-)$ est le nombre de "zéros".

(n_+, n_-) est la signature de q.
La signature ne dépend pas du choix de la réduction de Gauss en carrés (non démontré).
(On prend parfois comme définition de signature : (n_+, n_-, n_0)).

Si A est la matrice symétrique associée à q, alors

- n_+ est le nb de vp > 0 de A (en comptant leur multiplicité),
- n_- est le nb de vp < 0 de A,
- n_0 est la multiplicité de vp 0 (=dimension de $\ker(A)$).

Forme quadratique : signature 2)

Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$:

- si $n_+ = n$ (donc $n_0 = n_- = 0$), q est définie positive,
- si $n_- = n$, q est définie négative,
- si $n_- = 0$, q est semi-définie positive,
- si $n_+ > 0$ et $n_- > 0$, q est dite indéfinie.

Remarque : $n_+ + n_-$ est égal au rang de A.

Table of contents

Un produit scalaire sur $\mathcal{P}_n$

Sur l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$, on introduit le produit scalaire :

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_n.$$

$(\mathcal{P}_n, \langle , \rangle)$ est un espace euclidien $(\dim \mathcal{P}_n = n + 1)$.

Note : $\displaystyle\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 0$.

But : construire une famille orthogonale ou orthonormée sur $\mathcal{P}_n$.

Procédé de Gram–Schmidt sur $\mathcal{P}_n$

On orthonormalise avec ce produit scalaire la base canonique $\{p_0, p_1, p_2, \dots\} \overset{\text{déf.}}{=} \{1, X, X^2, \dots\}$.

- $\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = \int_0^1 1^2 dt = 1$, donc $q_0 = p_0 = 1$.

Procédé de Gram–Schmidt sur $\mathcal{P}_n$

On orthonormalise avec ce produit scalaire la base canonique $\{p_0, p_1, p_2, \dots\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{1, X, X^2, \dots\}$.

- $\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = \int_0^1 1^2 dt = 1$, donc $q_0 = p_0 = 1$.
- $\tilde{q}_1 = p_1 - \langle p_1, q_0 \rangle q_0 = X - \left(\int_0^1 t \times 1 dt\right) q_0 = X - \frac{1}{2}1$.
  $\|\tilde{q}_1\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12}$, donc

$$q_1 = \sqrt{3}(2X - 1).$$

Procédé de Gram–Schmidt sur $\mathcal{P}_n$

On orthonormalise avec ce produit scalaire la base canonique $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \overset{\text{déf.}}{=} \{1, X, X^2, \ldots\}$.

- $\|p_0\|^2 = \langle p_0, p_0 \rangle = \int_0^1 1^2 dt = 1$, donc $q_0 = p_0 = 1$.
- $\tilde{q}_1 = p_1 - \langle p_1, q_0 \rangle q_0 = X - \left(\int_0^1 t \times 1 dt\right) q_0 = X - \frac{1}{2}1$.
  $\|\tilde{q}_1\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12}$, donc
  $$q_1 = \sqrt{3}(2X - 1).$$
- $\tilde{q}_2 = p_2 - \langle p_2, q_0 \rangle q_0 - \langle p_2, q_1 \rangle q_1$. On calcule :
  $\langle p_2, q_0 \rangle = \int_0^1 t^2 \times 1 dt = \frac{1}{3}$ et
  $\langle p_2, q_1 \rangle = \sqrt{3} \int_0^1 t^2 \times (2t - 1) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
  Donc, $\tilde{q}_2 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2X - 1)$, et
  $$\tilde{q}_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|}.$$

Quelques propriétés avec la BON sur $\mathcal{P}_2$

Dans la base orthonormée $\{q_0, q_1, q_2\}$ de $\mathcal{P}_2$, tout polynôme p s'écrit (*i.e.* $\exists! \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dans $\mathbb{R}$ tq.) $p = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.
On a donc

- $\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.
- $\langle p, q_j\rangle = \alpha_j$ pour tout $j = 0, 1, 2$.
- si $q = \sum_{i=0}^{2} \beta_j q_j$, alors $\langle p, q\rangle = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \beta_j$.
- $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathrm{Vect}\langle q_2\rangle$ et $\mathcal{P}_1 \perp \mathrm{Vect}\langle q_2\rangle$ (d'après Gram–Schmidt).

Intégration numérique de Legendre 1)

But : on veut approcher une intégrale par une comb. linéaire d'évaluations de fonctions (+ facile à calculer...) :

$$I(f) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)dt \approx J(f) \overset{\text{déf.}}{=} \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2).$$

(I et J sont des applications linéaires en f.)

Intégration numérique de Legendre 1)

But : on veut approcher une intégrale par une comb. linéaire d'évaluations de fonctions (+ facile à calculer...) :

$$I(f) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)dt \approx J(f) \overset{\text{déf.}}{=} \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2).$$

(I et J sont des applications linéaires en f.)

On choisit $\xi_1, \xi_2 =$ racines de $\tilde{q}_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

($\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ sont dans $[0, 1]$.)

Intégration numérique de Legendre 1)

But : on veut approcher une intégrale par une comb. linéaire d'évaluations de fonctions (+ facile à calculer...) :

$$I(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^1 f(t)dt \approx J(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2).$$

(I et J sont des applications linéaires en f.)

On choisit $\xi_1, \xi_2 =$ racines de $\tilde{q}_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

($\xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ sont dans $[0,1]$.)

On cherche ω_1, ω_2 pour que $J(q_0) = I(q_0)$ et $J(q_1) = I(q_1)$

(où $q_0 = 1$ et $q_1 = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2})$).

Système linéaire (en $[\omega_1, \omega_2]^T$) à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{r} q_0(\xi_1)\omega_1 + q_0(\xi_2)\omega_2 = \int_0^1 q_0 \\ q_1(\xi_1)\omega_1 + q_1(\xi_2)\omega_2 = \int_0^1 q_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \sqrt{12}\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\omega_1 + \omega_2) = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$.

Intégration numérique de Legendre 2)

Remarque : pour tout $j \geq 1$, $\int_0^1 q_j = \int_0^1 q_j \times 1 = \langle q_j, q_0 \rangle = 0$.
Aucun calcul!

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\xi_1\right) + f\left(\xi_2\right)\right)$.

A-t-on $I(q_2) = J(q_2)$?

Intégration numérique de Legendre 2)

Remarque : pour tout $j \geq 1$, $\int_0^1 q_j = \int_0^1 q_j \times 1 = \langle q_j, q_0 \rangle = 0$.
Aucun calcul!

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\xi_1\right) + f\left(\xi_2\right)\right)$.

A-t-on $I(q_2) = J(q_2)$?
Oui, car ξ_1, ξ_2 sont les racines de q_2:
$\frac{1}{2}(q_2(\xi_1) + q_2(\xi_2)) = 0 = \int_0^1 q_2$.

Intégration numérique de Legendre 2)

Remarque : pour tout $j \geq 1$, $\int_0^1 q_j = \int_0^1 q_j \times 1 = \langle q_j, q_0 \rangle = 0$.
Aucun calcul!

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \approx \frac{1}{2}\left(f\left(\xi_1\right) + f\left(\xi_2\right)\right)$.

A-t-on $I(q_2) = J(q_2)$?
Oui, car ξ_1, ξ_2 sont les racines de q_2:
$\frac{1}{2}(q_2(\xi_1) + q_2(\xi_2)) = 0 = \int_0^1 q_2$.

Finalement :

- pour tout $p \in \mathcal{P}_2$, on a $I(p) = J(p)$ (exact jusqu'au degré 2)

Preuve : par linéarité de I et J, on a $I(p) = I(\sum_{i=0}^2 \alpha_j q_j) = \sum_{i=0}^2 \alpha_j I(q_j) = \sum_{i=0}^2 \alpha_j J(q_j) = J(\sum_{i=0}^2 \alpha_j q_j) = J(p)$.
Avec ce choix de ξ_i, gain d'un degré d'exactitude de la formule.

Suite : voir MT09!