MÉTHODE DE GRAM-SCHMIDT ET CONSTRUCTION D'UNE BON DE VECTEURS PROPRES D'UNE MATRICE SYMÉTRIQUE

ANTOINE ZUREK

1. Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (G-S)

Soit (x_1, x_2, x_3) une base de $\mathbb{R}^3$. On veut dans un premier temps construire une base orthonormée (BON) de $\mathbb{R}^3$ à partir de (x_1, x_2, x_3). Autrement dit on cherche des vecteurs (y_1, y_2, y_3) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\text{Vect}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \text{Vect}\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \mathbb{R}^3$ et

$$\langle y_i, y_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Pour ce faire nous allons procéder en trois étapes en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.

Etape 1. On construit y_1 via la formule

$$y_1 = \frac{x_1}{||x_1||}. \tag{1}$$

On a bien $||y_1|| = 1$ et $\text{Vect}\langle y_1\rangle = \text{Vect}\langle x_1\rangle$.

Etape 2. On cherche maintenant un vecteur z_2 vérifiant $\langle z_2, y_1\rangle = 0$ et de la forme

$$z_2 = x_2 + \alpha y_1,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à déterminer. D'après la condition $\langle z_2, y_1\rangle = 0$ alors on a

$$0 = \langle z_2, y_1\rangle = \langle x_2 + \alpha y_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_1\rangle + \alpha \underbrace{\langle y_1, y_1\rangle}_{=||y_1||^2=1}.$$

Ainsi d'après cette relation pour que $\langle z_2, y_1\rangle = 0$ il faut choisir α de la forme

$$\alpha = -\langle x_2, y_1\rangle.$$

On pose enfin

$$y_2 = \frac{z_2}{||z_2||} = \frac{x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1}{||z_2||}. \tag{2}$$

Il est alors simple de vérifier que $||y_2|| = 1$, $\langle y_2, y_1\rangle = 0$ et $\text{Vect}\langle y_1, y_2\rangle = \text{Vect}\langle x_1, x_2\rangle$.

Date: December 2, 2022.

Etape 3. On cherche maintenant l'expression de y_3. Pour ce faire on cherche d'abord un vecteur z_3 vérifiant $\langle z_3, y_1\rangle = \langle z_3, y_2\rangle = 0$ (en gros un vecteur orthogonal aux vecteurs y_1 et y_2). Pour ce faire on considère

$$z_3 = x_3 + \beta y_1 + \gamma y_2,$$

avec β et $\gamma \in \mathbb{R}$ à déterminer. Comme dans l'étape 2 on utilise les conditions $\langle z_3, y_1\rangle = 0$ et $\langle z_3, y_2\rangle = 0$ pour trouver β et γ. On obtient

$$0 = \langle z_3, y_1\rangle = \langle x_3, y_1\rangle + \beta \underbrace{\langle y_1, y_1\rangle}_{=||y_1||^2=1} + \gamma \underbrace{\langle y_2, y_1\rangle}_{=0} = \langle x_3, y_1\rangle + \beta,$$

et

$$0 = \langle z_3, y_2\rangle = \langle x_3, y_2\rangle + \beta \underbrace{\langle y_1, y_2\rangle}_{=0} + \gamma \underbrace{\langle y_2, y_2\rangle}_{=||y_2||^2=1} = \langle x_3, y_2\rangle + \gamma.$$

D'où

$$\beta = -\langle x_3, y_1\rangle, \quad \gamma = -\langle x_3, y_2\rangle,$$

et ainsi

$$z_3 = x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2.$$

Enfin on pose

$$y_3 = \frac{z_3}{||z_3||} = \frac{x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2}{||z_3||}, \tag{3}$$

et on vérifie que $||y_3|| = 1$, $\langle y_3, y_1\rangle = 0$, $\langle y_3, y_2\rangle = 0$ et $\mathrm{Vect}\langle y_1, y_2, y_3\rangle = \mathrm{Vect}\langle x_1, x_2, x_3\rangle$.

2. Matrice symétrique et BON de vecteurs propres

D'après le Théorème 5.4.1 si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est symétrique ($A^\top = A$) alors A est diagonalisable et il existe une BON de $\mathbb{R}^n$ constituée des vecteurs propres de A. Cette affirmation n'implique pas que les vecteurs propres d'une matrice symétrique forment une base orthonormée. On sait juste, d'après le Chapitre 4, que comme A est diagonalisable (car symétrique) alors les vecteurs propres de A forment une base de $\mathbb{R}^n$ mais cette base n'est pas nécessairement orthonormée !

Cependant d'après ce qui précède on peut utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour rendre cette base de vecteurs propres orthonormée. En fait comme les sous-espaces propres, notés V_λ, sont orthogonaux (voir Proposition 5.4.1) alors il suffit d'appliquer Gram-Schmidt à "l'intérieur" de chaque V_λ. On explique dans la suite ce que signifie à "l'intérieur" de chaque V_λ et pourquoi cela ne marche pas si les V_λ ne sont pas orthogonaux.

Pour illustrer le propos, on considère dans la suite $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice non symétrique admettant λ_1 comme valeur propre double et λ_2 comme valeur propre simple, i.e.,

$$\dim(\ker(A - \lambda_1 I_3)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\ker(A - \lambda_2 I_3)) = 1.$$

On note dans la suite x_1 et x_2 deux vecteurs propres de A associés à λ_1 et x_3 un vecteur propre associé à λ_2. On suppose que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (non orthonormée). Pour rendre cette base orthonormée on applique la méthode de Gram-Schmidt et d'après (1)–(3) on obtient que les vecteurs

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{||x_1||}, \\ y_2 &= \frac{x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1}{||x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1||}, \\ y_3 &= \frac{x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2}{||x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2||}, \end{aligned}$$

forment une BON de $\mathbb{R}^3$. Cependant, ce n'est pas une BON de vecteurs propres de A. En effet dans cet exemple y_3 n'est pas un vecteur propre de A ! On est en fait confronté à la question suivante :

Question. Est-ce que la somme de deux vecteurs propres est toujours un vecteur propre ?

- Si X et Y sont deux vecteurs propres associés à une même valeur propre λ alors X et $Y \in V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$. Or V_λ est un espace vectoriel donc $X + Y \in V_\lambda$ et dans ce cas oui la somme de deux vecteurs propres associés à la même valeur propre est un vecteur propre.
- Si X et Y sont deux vecteurs propres associés à λ et μ respectivement avec $\lambda \neq \mu$. Alors on a

  $$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad AY = \mu Y.$$

  Peut-on trouver un β vérifiant $A(X+Y) = \beta(X+Y)$? Supposons que β existe alors

  $$\begin{aligned} A(X+Y) = \beta(X+Y) &\Leftrightarrow AX + AY = \beta X + \beta Y \\ &\Leftrightarrow \lambda X + \mu Y = \beta X + \beta Y \\ &\Leftrightarrow (\lambda - \beta)X + (\mu - \beta)Y = 0. \end{aligned}$$

  Comme on suppose $\lambda \neq \mu$ alors (X, Y) est une famille libre ce qui implique que $\lambda - \beta = \mu - \beta = 0$ et donc

  $$\lambda = \mu = \beta = 0,$$

  ce qui est impossible.

Réponse : Oui si les vecteurs propres sont associés à la même valeur propre non sinon.

Or si on reprend pas exemple l'expression de y_3 on a

$$y_3 = \frac{1}{||x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2||} \left(\underbrace{x_3}_{\in V_{\lambda_2}} - \underbrace{\langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2}_{\in V_{\lambda_1}} \right).$$

D'après ce qui précède on en déduit que y_3 n'est pas un vecteur propre de A.

Conclusion. Si A n'est pas symétrique alors de la base de vecteurs propres de A donnée par (x_1, x_2, x_3) nous avons construit une BON (y_1, y_2, y_3). Cependant (y_1, y_2, y_3) n'est pas une BON de vecteurs propres de A.

Reprenons maintenant l'exemple $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ avec λ_1 comme valeur propre double de A et λ_2 comme valeur propre simple de A mais cette fois on suppose en plus que A est symétrique. D'après la Proposition 5.4.1 alors V_{λ_1} et V_{λ_2} sont orthogonaux. Ce qui implique que si on note x_1 et x_2 deux vecteurs propres de A associés à λ_1 et x_3 un vecteur propre associé à λ_2 alors

$$\langle x_1, x_3\rangle = \langle x_2, x_3\rangle = 0. \tag{4}$$

Si on applique la méthode de Gram-Schmidt à (x_1, x_2, x_3) on obtient les vecteurs suivant :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{||x_1||}, \\ y_2 &= \frac{x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1}{||x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1||}, \\ y_3 &= \frac{x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2}{||x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2||}. \end{aligned}$$

Par construction (y_1, y_2, y_3) est une BON de $\mathbb{R}^3$. De plus comme A est symétrique et que V_{λ_1} et V_{λ_2} sont orthogonaux alors on obtient via (4)

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{||x_1||}, \\ y_2 &= \frac{x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1}{||x_1 - \langle x_2, y_1\rangle y_1||}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{||x_3||}. \end{aligned}$$

En particulier dans ce cas $y_3 \in V_{\lambda_2}$ et (y_1, y_2, y_3) est une BON de vecteurs propres. On déduit également des relations précédentes que pour construire (y_1, y_2, y_3) il suffit d'appliquer la méthode "à l'intérieur" des espaces propres. En gros pour obtenir y_3 on ne s'intéresse pas aux vecteurs de V_{λ_1}. On applique donc la méthode de Gram-Schmidt de manière indépendante à (x_1, x_2) et ensuite à x_3.

Université de Technologie de Compiègne, LMAC, 60200 Compiègne, France
Email address: antoine.zurek@utc.fr