MT12 - P2023 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème : 6 points*)(Questions de cours)

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Montrer que cette famille est libre.
2. Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de f, i.e., la définition de $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Rappeler, pour tout $n \geq 1$, le lien entre $a_0(f)$, $a_n(f)$, $b_n(f)$ et les coefficients complexes $c_0(f)$, $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$, i.e., $a_0(f) = \dots$, $a_n(f) = \dots$, $b_n(f) = \dots$ pour tout $n \geq 1$.
3. Soit $N \geq 1$, on note $\omega_N = e^{2i\frac{\pi}{N}}$. Donner la définition de la transformée de Fourier discrète d'ordre N.

Exercice 2 (*barème : 6 points*)(Exercice de synthèse)

Soit f la fonction 2π-périodique et paire avec

$$f(t) = t^2 \quad \text{si } t \in [0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.
3. Est-ce que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$?
4. Est-ce que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$?
5. Justifier la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Enfin justifier la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3 (*barème : 8 points*)(Phénomène de Gibbs)

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

3. On note f_N la $(2N-1)$-ième somme partielle de la série de Fourier de f. D'après ce qui précède pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

Montrer que la suite $(f_N)_{N \geq 1}$ des sommes partielles de la série de Fourier de f converge simplement vers f (indication : on pourra distinguer la convergence de $(f_N(x))_{N \geq 1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ et $x \in \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$) ? Y-a-t-il convergence uniforme ?

4. Justifier que la fonction f_N est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f_N'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \cos((2n-1)x).$$

5. Dans cette question on s'intéresse aux variations de la fonction f_N

   (a) Justifier que pour $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ alors

   $$f_N'(k\pi) = (-1)^k \frac{4N}{\pi}.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ fixé. En utilisant la relation

   $$f_N'(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i(2n-1)x} \right),$$

   où Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe, justifier que

   $$f_N'(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2Nx)}{\sin(x)}.$$

   (c) En déduire que f_N' s'annule en $x_N^* = \pi/2N$ et justifier que x_N^* est un maximum de f_N. On notera dans la suite $a_N^* = f_N(x_N^*)$.

6. Soit g une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, alors g vérifie la relation suivante :

$$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Soit $x \in [0, \pi[$, en appliquant judicieusement la relation (1), montrer que

$$f_N(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2Nt)}{\sin(t)}\, dt.$$

7. En déduire que

$$a_N^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2N} \frac{\sin(2Nt)}{\sin(t)}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{2N \sin(t/2N)}\, dt.$$

Conclusion de l'exercice : on peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que $\lim_{N \to +\infty} a_N^* > 1$. En conclusion les oscillations de la suite $(f_N)_{N \geq 1}$ au voisinage des points de discontinuités de f ne disparaissent pas lorsque $N \to +\infty$, ce phénomène est appelé phénomène de Gibbs.