Correction TD 8

PROBLEME: étude du noyau d'un graphe orienté.

Définition:

> Un sous-ensemble K de l'ensemble X des sommets d'un graphe orienté G=(X, U) est dit noyau de G si:
>
> 1. K est un stable de G, c'est-à-dire : aucun couple de sommets de K n'est lié par un arc.
>
> 2. tout sommet à l'extérieur de K est extrémité initiale d'un arc dont l'extrémité terminale est dans K

Discussion:

Certains graphes n'ont pas de noyau. D'autres graphes ont plusieurs noyaux. Le but principal de ce problème est de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau et d'utiliser cette notion pour étudier des jeux.

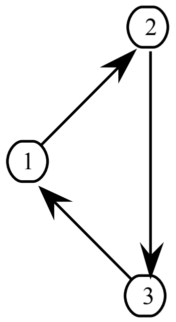
Question 0 : propriété caractéristique

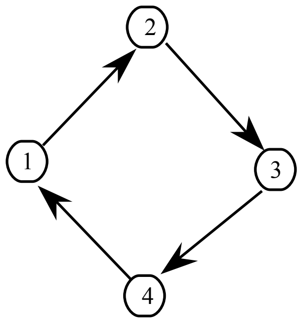
Montrer que K est un noyau si et seulement si :

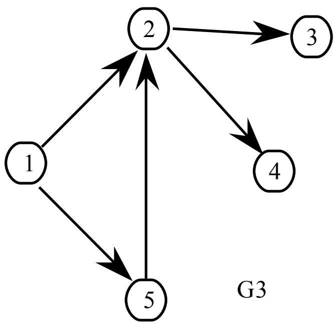
- tout sommet dans K a ses successeurs en dehors de K,
- tout sommet en dehors de K a au moins un de ses successeurs dans K.

Question 1: pour se familiariser avec la notion de noyau.

Déterminer tous les noyaux (s'il en existe) des graphes G_1, G_2 et G_3.


G1


G2


G3

Question 2: étude théorique des graphes sans circuit.

On se propose de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau. Pour cela, on étudie l'algorithme NOYAU.

```
NOYAU
DEBUT
   Lire G=(X,U) un graphe orienté sans circuit;
   Initialement aucun sommet n'est coloré;
   Numéroter les sommets de G selon une numérotation inverse: si (i,j) ∈ U, alors i est strictement plus
   grand que j (en particulier, le sommet 1 est un sommet sans successeur);
   Colorer en rouge le sommet 1;
   Pour I:=2,N faire
   DEBUT
   Si un des successeurs de I est rouge, colorer I en vert
   Sinon colorer I en rouge
   FIN
   Le noyau est l'ensemble des sommets rouges
FIN
```

$O(n+m)$

$O(m)$

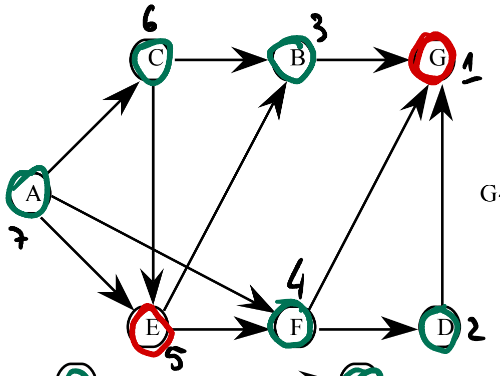
examen d'un sommet $= O(d^+(i))$

$\Rightarrow$ examen de tous les sommets $= O\left(\sum_{i=1}^{n} d^+(i)\right) = O(m)$

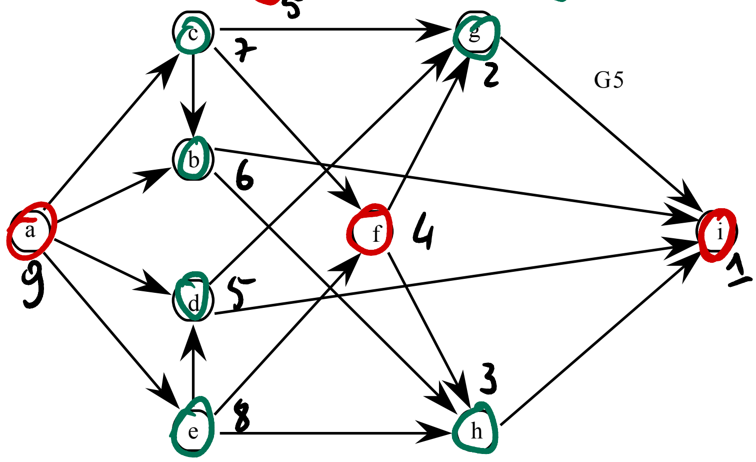
$O(m)$

A) Faire tourner l'algorithme sur les graphes G_4 et G_5 ci-dessous.

On rapportera les couleurs finales.



G4



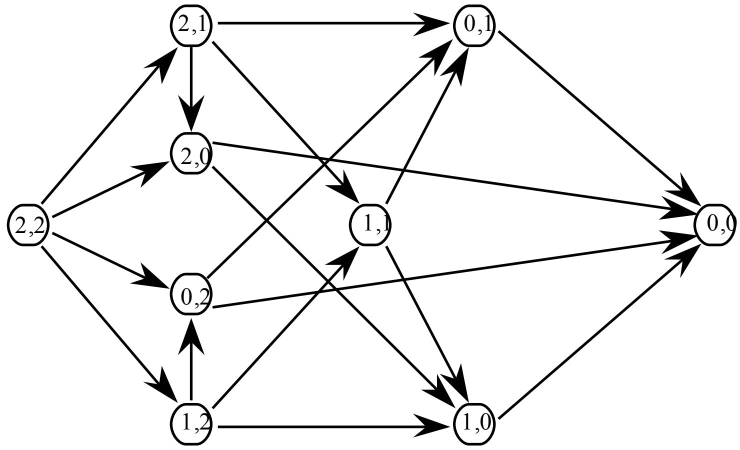
G5

B) Montrer qu'en cours d'algorithme :
-tout sommet vert a au moins un successeur rouge ;
-tout sommet rouge n'a pas de successeur rouge.
En déduire que les sommets rouges forment un noyau de G.
C) Montrer que l'algorithme se termine et qu'alors tous les sommets sont colorés.
D) Montrer l'unicité du noyau.
E) Donner les tableaux principaux qui permettent de coder le plus efficacement cette procédure. On justifiera succinctement et on rapportera la complexité résultante de l'algorithme.

<u>Question 3: application aux jeux</u>

Dans le jeu de NIM, on a deux piles de jetons, chacun des joueurs joue chacun son tour et prend n'importe quel nombre de jetons de l'une des deux piles. **Le joueur qui prend le dernier jeton gagne, l'autre perd.** Ainsi la position (0,0) pour le joueur atteignant cette position est gagnante. Le jeu complet est décrit par un graphe orienté dont les sommets correspondent à l'état du jeu et les arcs aux "coups" des joueurs. Ici chaque état du jeu est décrit par une paire d'entiers (x,y) qui indique le nombre de jetons dans la première pile et la deuxième pile, respectivement.

Par exemple, si l'état initial de la pile est (2,2), le graphe du jeu est le suivant:



La question importante pour ce jeu est: quand un joueur est-il certain de gagner et comment doit-il jouer?

Nous allons d'abord tenter de répondre à cette question pour des piles de taille initiale 2, puis on généralisera.

Une position sera dite gagnante si le joueur venant d'atteindre cette position gagne quelle que soit la façon de jouer de son adversaire sous réserve que lui-même joue bien dans la suite du jeu (c'est donc à son adversaire de jouer).

Une position sera dite perdante si le joueur ayant atteint cette position va perdre si son adversaire joue bien.

A) Quelles sont les positions gagnantes pour le cas particulier? Quelles sont les positions perdantes? Si B commence, qui va gagner?

B) Pour un jeu de NIM en position de départ (k_1, k_2) et si B commence à jouer, à quelle condition sur k_1 et k_2, A va-t-il gagner ? Formuler en français une stratégie gagnante. Que pouvez-vous dire si on généralise à trois piles ?

C) Le jeu de NIM est un jeu à deux joueurs, sans hasard, avec information parfaite (chacun des joueurs connaît avant de jouer l'état du jeu), à espace d'états fini et dont le graphe d'états associé est sans circuit. Montrer, de façon générale, que si le graphe d'états d'un jeu à deux joueurs est sans circuit, fini, et a un seul état final gagnant pour celui qui l'atteint, et si les deux joueurs jouent parfaitement, on peut prédire à l'avance qui gagnera à l'aide de la notion de noyau. Justifier complètement.

D) Où se situe en général la difficulté pour un tel jeu ?

E) Pourquoi la méthode précédente ne s'applique pas même théoriquement au jeu d'échecs ou au jeu de dames ? Justifier votre réponse. Qu'y-a-t-il de différent ? Quelle idée cela vous donne pour ces jeux ?

Littérature...

Gaël GIRAUD

"La théorie des jeux."

"The essential of John Nash"

Harold Kuhn

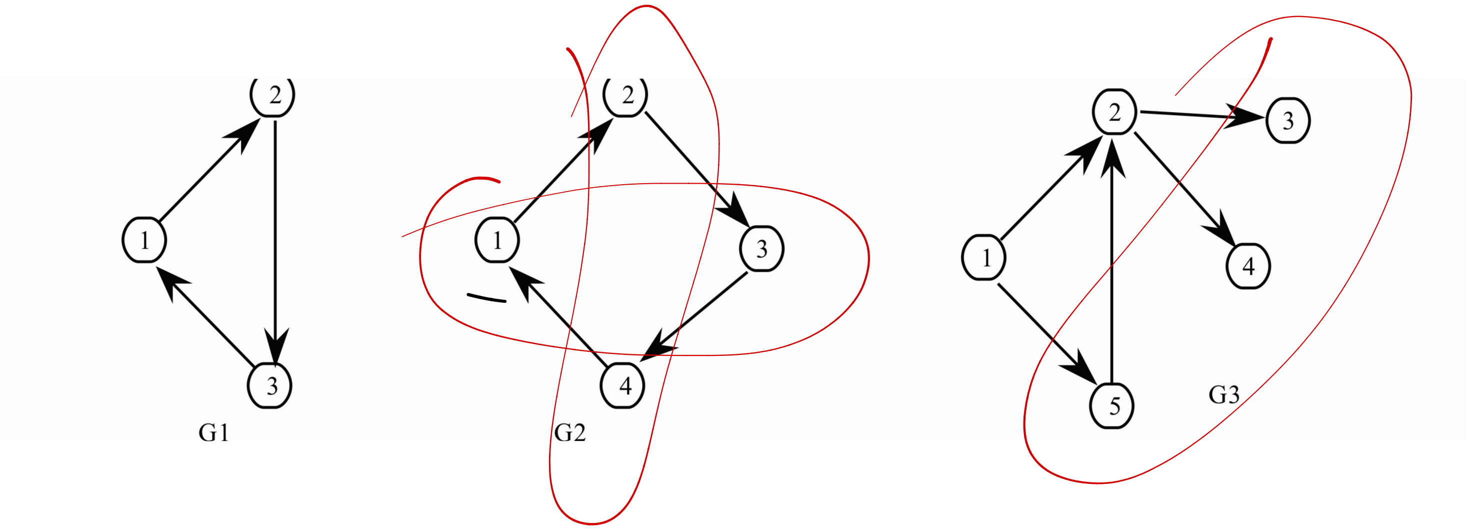
Sylvie NASAR

Simon Singh

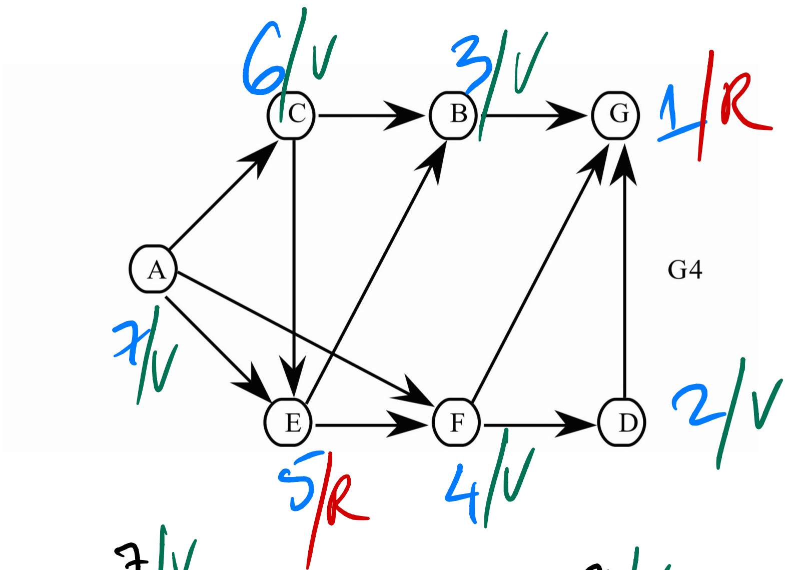
Histoire des codes secrets

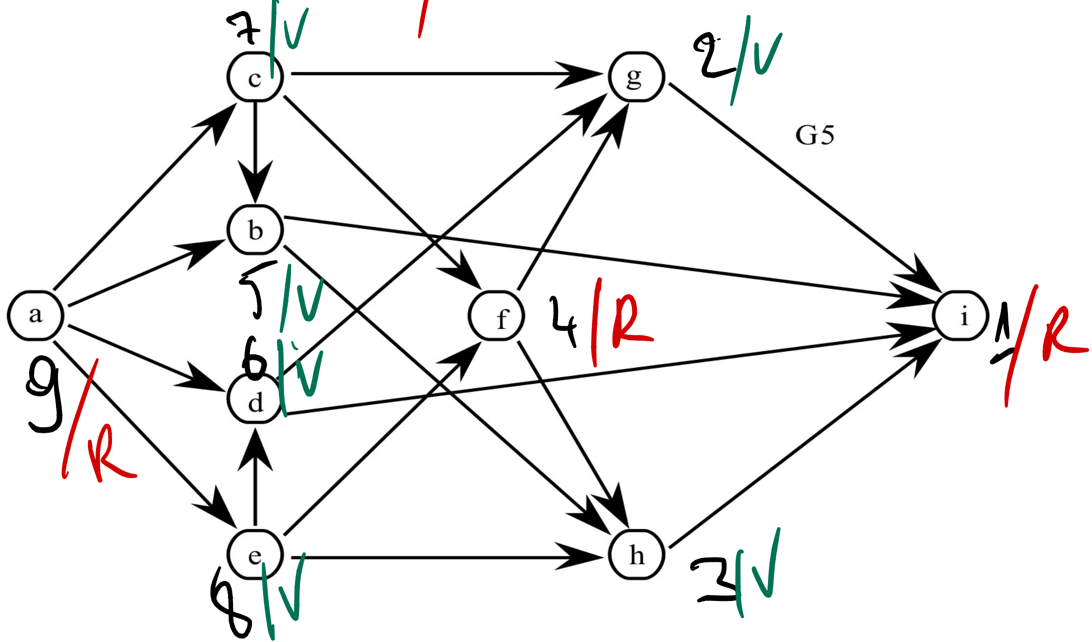
Question 0.
Rappelons qu'un sous-ensemble K de l'ensemble X des sommets d'un graphe orienté G=(X, U) est dit noyau de G si:
1. K est un stable de G, c'est-à-dire : aucun couple de sommets de K n'est lié par un arc.
2. tout sommet à l'extérieur de K est extrémité initiale d'un arc dont l'extrémité terminale est dans K
On remarque alors que : « tout sommet dans K a ses successeurs en dehors de K » est equivalent avec la propriété 1 de la définition, tandis que « tout sommet en dehors de K a au moins un de ses successeurs dans K » et equivalent à la propriété 2 de la définition.

Question 1. Il n'y a aucun noyau dans G1, il y a deux noyaux ((1,3) et (2,4)) dans G2 et une unique noyau (3,4,5).



Question 2.A) : Appliquer l'algorithme sur G4 et G5 donne la coloration des sommets suivants :





Question 2.B) :
Montrer qu'en cours d'algorithme :
-tout sommet vert a au moins un successeur rouge ; (propriété 1)
-tout sommet rouge n'a pas de successeur rouge. (propriété 2)
En déduire que les sommets rouges forment un noyau de G.

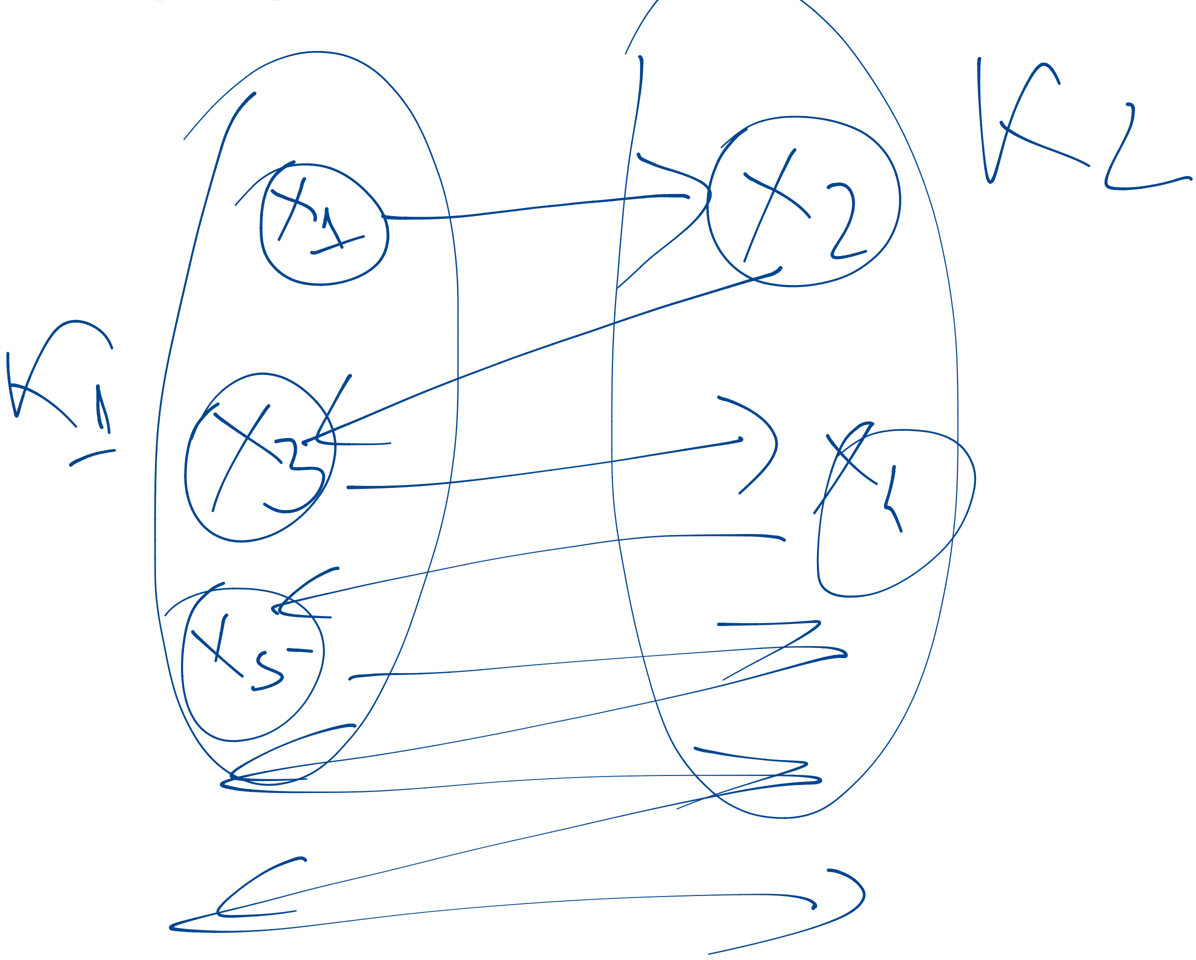
Réponse: on démontrera ces deux propriétés par recurrence sur le nombre I des sommets colorés ou des itérations de l'algorithme (on note qu'à l'itération I on examine et colore le sommet numéroté I). À la fin de la premiere itération, il y a un sommet coloré, le sommet 1 en rouge, et clairement les deux propriétés sont vérifiées (pour la première propriété : il n'y a aucun sommet vert et pour la deuxième : le sommet 1 n'a aucun successeur, donc pas de successeur rouge).
Supposons que la propriété est vérifiée après la coloration/examen du sommet I et démontrons que cela reste vrai à la fin de l'examen du sommet I+1. Supposons que le sommet I+1 est coloré en rouge, ce qui veut dire qu'il existe que des successeurs verts. Dans ce cas, la propriété 2 reste vérifiée car pour le sommet I+1 tous les successeurs sont de numéros <= I => ils sont déjà colorés => ils sont tous verts. Cette propriété 2 reste vérifiée pour tous les autres sommets rouge comme la propriété 1 reste vérifiée pour tous les sommets existants verts par hypothèse de recurrence. Si le sommet I+1 sera coloré en vert, selon l'algorithme il existe un successeur rouge et donc la propriété 1 reste vérifiée pour le sommet I+1 tandis pour le reste des sommets les deux propriétés restent vérifiées par hypothèse de recurrence.
On en déduit que les sommets rouge forment un noyau car les deux propriétés de la définition sont vérifiées. La propriétés 2 ci-dessus confirme que cet ensemble est un stable et la propriété 1 confirme que tout sommet non rouge (donc vert) a au moins un successeur rouge qui coincide avec la 2ème condition de la définition. Donc, les sommets rouge forment un noyau.

C) Montrer que l'algorithme se termine et qu'alors tous les sommets sont colorés.
Selon l'algorithme, à chaque itération on examine un nouveau sommet et lors de cet examen on prend une décision de coloration en fonction de la couleur de ses successeurs. Puisque les sommets sont examinés dans l'ordre de leur numérotation, cela garantit que l'examen d'un sommet est précédé de l'examen et la coloration de l'ensemble de ses successeurs. Donc, on est certain qu'on est toujours en mesure de prendre une décision de coloration lors de l'examen d'un sommet. Cela garantit que tout sommet sera coloré lors de son examen. Puisque dans l'algorithme on examinera tous les sommets, alors ils seront tous colorés et l'algorithme se terminera.

D) Montrer l'unicité du noyau dans un graph sans circuits.
L'existence est assurée par l'algorithme donné dans l'énoncé du td. : L'ensemble des sommets rouges obtenus a la fin de l'algo forme un noyau.
Démontrons l'unicité par l'absurde, donc le graphe est sans circuits et il existe bien deux noyaux : noyau K1 différente de K2. Alors il existe x1 appartient à K1 et x1 n'appartient pas à K2, cela implique qu'il existe l'arc (x1, x2) tel que : x2 appartient à K2 et x2 n'appartient pas à K1 (car K1 est un noyau et tout successeur d'un sommet dans le noyau est en dehors du noyau). Ainsi de suite on pourra construire un chemin x1, x2, … xk etc. Puisque le graphe est fini (avec un nombre de sommets fini), lors de la construction de ce chemin on va finir par rencontrer un sommet déjà visité donc il y aura un circuit, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

E) Donner les tableaux principaux qui permettent de coder le plus efficacement cette procédure. On justifiera succinctement et on rapportera la complexité résultante de l'algorithme.
Réponse: on utilisera les files des successeurs de taille O(N + M). Ensuite on appliquera l'algorithme de bonne numérotation vu en cours qui coutera O(M). Ensuite, on obtiendra la numérotation inverse par une bijection triviale I -> N-I (qui coute O(N)).
Ensuite la boucle consiste simplement à examiner une fois chacun des successeurs de chaque sommets (accès direct par BETA). Elle coûte donc globalement O(N) + O(M), O(N) pour l'incrément de la boucle et O(M) pour la lecture de BETA.
Un vecteur COULEUR de dimension N est en outre indispensable (0 = non colorié, 1 = rouge et 2 = vert).
Etant donné que l'on a généralement M>N cet algorithme est donc de complexité linéaire en O(M).

Schema explicatif question 2.D:



Explications liées à la question 2.E.

Une iteration = Examen d'un sommet.

iteration i $\rightarrow$ Examen du sommet i

$\Downarrow$

$O(d^+(i))$

Boucle :$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{N} O(d^+(i)) = O(M)$

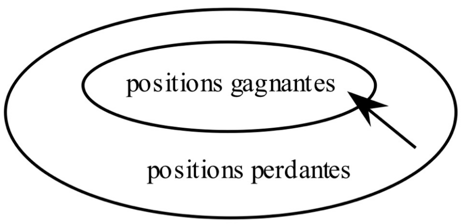
Question 3: application aux jeux
A) Si un joueur atteint l'état (0, 0), il gagne car il a pris le dernier baton. Si un joueur atteint les états (0, 1); (2, 0); (0, 2) et (1, 0) il va perdre car son adversaire va atteindre l'état (0, 0) en un coup.
Si un joueur atteint l'état (1, 1), il gagne car son adversaire atteindra les états (0, 1) et (1, 0) qui sont gagnant.
Si un joueur atteint les états (2, 1) ou (1, 2), il perdra si son adversaire joue bien : ce dernier devra atteindre (1, 1) !
Enfin si un joueur commence (état (2, 2) et que son adversaire joue bien perdra car son adversaire peut atteindre un coup gagnant.
En conséquence si B commence, il perd.
Les positions perdantes sont (2, 1), (2, 0), (0, 2), (1, 2) et (0, 1).
Les positions gagnantes sont (2, 2), (1, 1), (0, 0).
En fait la position est gagnante si elle est dans le noyau.

B) stratégie gagnante :
Si k1 ≠ k2 avec pour fixer les idées k1 > k2 retirer k1 - k2 batons de la deuxième pile pour atteindre l'état (k2, k2) qui est un état gagnant.
Evidemment si k1 = k2, il n'y a de statégie gagnante sinon de compter sur la malchance de l'adversaire.

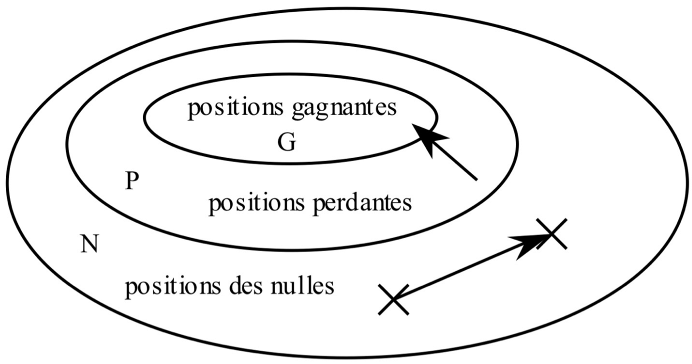
C) Si le graphe d'états associé est sans circuit. Il a un noyau unique. Si c'est à B de jouer et qu'il est en dehors du noyau, il va bien jouer donc atteindre un état du noyau (stratégie gagnante). Si au contraire, il est déjà dans le noyau, il est obligé d'en sortir parce que le noyau est un stable et va perdre si son adversaire connaît la stratégie gagnante.

D) La difficulté d'un tel jeu tient au combinatoire, il y a en général un nombre exponentiel d'état et il paraît difficile de déterminer le noyau pour pouvoir en déduire une stratégie gagnante.

E) Dans le jeu d'échec il est bien connu qu'il y a des circuits, on n'a donc pas la garantie d'existence du noyau. S'il existe un noyau et que l'on atteint une position du noyau (problème non trivial !), il y a une statégie gagnante. Dans ce cas soit le joueur qui commence, soit l'autre devrait gagner à tous les coups. Au contraire, s'il n'y a pas de noyau, ou plutôt si la position de départ n'est ni perdante ni gagnante, alors toute partie devrait se terminer par une nulle ! Pour être plus précis, nous représentons les positions par la figure ci-dessous :



1a



1b

1a s'il existe un noyau, alors toute position gagnante a un successeur qui est une position gagnante 1b s'il n'y a pas de noyau alors toute position "nul" a un successeur qui est une position "nul"

En fait, la figure 1b avec N ≠ 0 représente la réalité, mais on ne sait pas où est la position initiale dans N, P ou G ?
NB : Dans le jeu d'échec, l'état est la position des pièces sur l'échiquier vue par le joueur qui vient de jouer (indépendamment des couleurs).