MT12 P23 – Note technique TP6

Antoine Zurek (antoine.zurek@utc.fr)

Décembre 2023

Soit $f : y \mapsto f(y)$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) dans $\mathbb{R}^n$. Soit $T > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, on considère le système d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \text{ pour } t \in [0, T], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

On explique (au moins formellement) dans cette note l'origine des trois méthodes considérées dans le TP6 pour calculer une solution approchée au problème (1). Pour cela, on se donne une subdivision régulière de $[0, T]$: $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ de pas $\Delta t = T/N$ et on cherche à calculer une solution approchée $(Y^k)_{1 \leq k \leq N}$ (où $Y^k \in \mathbb{R}^n$) du problème (1) où $Y^k \approx y(t_k)$ pour $k = 1, \ldots, N$.

1 Méthode d'Euler Explicite

Soit t_k un instant de la discrétisation de l'intervalle $[0, T]$ avec $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. La méthode d'Euler explicite repose sur la formule de développement de Taylor. En effet, on a

$$y(t_k + \Delta t) = y(t_{k+1}) = y(t_k) + \Delta t y'(t_k) + o(\Delta t).$$

Or, y est solution du problème

$$y'(t_k) = f(y(t_k)),$$

et on en déduit que

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \Delta t f(y(t_k)) + o(\Delta t).$$

Ainsi en notant $Y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et $Y_k \approx y(t_k)$ on obtient Y_{k+1} comme solution de l'équation

$$Y_{k+1} = Y_k + \Delta t f(Y_k).$$

Remarque (Méthode d'Euler implicite). En remarquant que $t_k = t_{k+1} - \Delta t$ alors la formule de Taylor donne

$$y(t_k) = y(t_{k+1} - \Delta t) = y(t_{k+1}) - \Delta t y'(t_{k+1}) + o(\Delta t) = y(t_{k+1}) - \Delta t f(y(t_{k+1})) + o(\Delta t),$$

soit

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \Delta t f(y(t_{k+1})) + o(\Delta t).$$

Ainsi en notant $Y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et $Y_k \approx y(t_k)$ on obtient Y_{k+1} comme solution de l'équation

$$Y_{k+1} = Y_k + \Delta t f(Y_{k+1}).$$

Cette méthode, appelée méthode d'Euler implicite, est plus contraignante que la méthode d'Euler explicite car Y_{k+1} est présent des deux cotés de l'équation ce qui oblige, dans le cas ou f est une fonction non linéaire, à utiliser des méthodes de résolution numérique du type méthode de Newton afin de déterminer Y_{k+1}.

2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2)

La méthode RK2 repose sur la formule du trapèze [1]. En effet, pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ fixé, on intègre l'équation (1) entre t_k et t_{k+1}, on obtient alors

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(s))\, ds.$$

Pour approcher l'intégrale de f entre t_k et t_{k+1} on utilise à présent la méthode des trapèzes, à savoir :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(s))\, ds \approx \frac{\Delta t}{2} \left(f(y(t_k)) + f(y(t_{k+1})) \right).$$

1. Voir par exemple la page Wikipédia portant sur le calcul numérique d'une intégrale.

Enfin on approche la valeur de $y(t_{k+1})$ (présente dans le deuxième terme du membre de droite de l'expression précédente) via la méthode d'Euler explicite à savoir $y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \Delta t f(y(t_k))$. En conclusion on obtient

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}\Big(f(y(t_k)) + f\left(y(t_k) + \Delta t f(y(t_k))\right) \Big).$$

Ainsi en notant $Y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et $Y_k \approx y(t_k)$, la méthode RK2, ou de Heun, s'écrit

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{\Delta t}{2}\Big(f(Y_k) + f(Y_k + \Delta t f(Y_k)) \Big), \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

Le méthode RK4 est basée sur la méthode de Simpson [2] permettant de calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction, à savoir

$$\int_a^b g(s)\, ds \approx \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right).$$

Pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ fixé, on intègre (1) entre t_k et t_{k+1} et en appliquant la formule de Simpson on obtient

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{6} \left(f(y(t_k)) + 4f(y(t_{k+\frac{1}{2}})) + f(y(t_{k+1})) \right), \tag{2}$$

avec $t_{k+1/2} = (t_{k+1} + t_k)/2$ et on note dans la suite $k_1 = f(y(t_k))$. On réécrit alors (2) sous la forme

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{6} \left(k_1 + 4f(y(t_{k+\frac{1}{2}})) + f(y(t_{k+1})) \right). \tag{3}$$

Il faut à présent déterminer une valeur approchée de $f(y(t_{k+\frac{1}{2}}))$ et $f(y(t_{k+1}))$ à partir de $y(t_k)$, t_k et Δt. On commence par le terme $f(y(t_{k+\frac{1}{2}}))$. Dans un premier temps on décompose ce terme sous la forme

$$4f\Big(y(t_{k+\frac{1}{2}})\Big) = 2f\Big(y(t_{k+\frac{1}{2}})\Big) + 2f\Big(y(t_{k+\frac{1}{2}})\Big).$$

Pour le premier terme on remplace $y(t_{k+1/2})$ par son expression donnée par la méthode d'Euler explicite, à savoir $y(t_{k+1/2}) \approx y(t_k) + \Delta t f(y(t_k))/2$, d'où

$$f\Big(y(t_{k+\frac{1}{2}})\Big) \approx f\Big(y(t_k) + \Delta t k_1/2\Big) = k_2.$$

2. De même voir par exemple la page Wikipédia portant sur le calcul numérique d'une intégrale.

Le deuxième terme est approchée par la méthode d'Euler implicite, i.e., $y(t_{k+1/2}) \approx y(t_k) + \Delta t f(y(t_{k+1/2}))/2$. On approche alors le terme $f(y(t_{k+1/2}))$ par k_2, soit

$$f(y(t_{k+\frac{1}{2}})) \approx f\Big(y(t_k) + \Delta t f(y(t_{k+1/2}))/2\Big) \approx f\Big(y(t_k) + \Delta t k_2/2\Big) = k_3.$$

En conclusion, on a

$$4f(y(t_{k+\frac{1}{2}})) \approx 2k_2 + 2k_3,$$

avec

$$k_2 = f\Big(y(t_k) + \Delta t k_1/2\Big), \quad k_3 = f\Big(y(t_k) + \Delta t k_2/2\Big).$$

On réécrit alors (3) sous la forme

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + f(y(t_{k+1}))\right). \tag{4}$$

Finalement on estime $f(y(t_{k+1}))$ via la méthode du point milieu, à savoir

$$\int_a^b g(s)\,ds \approx (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

En utilisant cette formule et en intégrant (1) entre t_k et t_{k+1} on obtient

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \Delta t f(y(t_{k+1/2})).$$

On peut à présent approcher le terme $f(y(t_{k+1/2}))$ par k_3. Ainsi au final on a

$$f(y(t_{k+1})) \approx f\Big(y(t_k) + \Delta t f(y(t_{k+1/2}))\Big) \approx f\Big(y(t_k) + \Delta t k_3\Big) = k_4.$$

En conclusion, pour $k = 0, \dots, N-1$, on peut enfin réécrire (1) sous la forme

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{\Delta t}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 = f\Big(y(t_k)\Big), \\ k_2 = f\Big(y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}\,k_1\Big), \\ k_3 = f\Big(y(t_k) + \frac{\Delta t}{2}\,k_2\Big), \\ k_4 = f\Big(y(t_k) + \Delta t\,k_3\Big), \end{cases}$$

et en définissant $Y_{k+1} \approx y(t_{k+1})$ et $Y_k \approx y(t_k)$ on retrouve bien les formules données pour la méthode RK4.