

# TD MT12

ANTOINE ZUREK

## TABLE DES MATIÈRES

1. Chapitre 1	1
2. Chapitre 2	5
3. Chapitre 3	9
4. Chapitre 4	11
5. Chapitre 5	13
6. Chapitre 6	16

### 1. CHAPITRE 1

#### Exercice 1.

(1) En utilisant des IPP calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx, \quad \int_0^1 x \arctan(x) dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$$

(2) En utilisant un changement de variable calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$

**Exercice 2.** Soit  $f$  une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle  $[0, a]$  (avec  $a > 0$ ). Pour ce faire on utilise dans un premier temps la méthode des rectangles à gauche puis la méthode des trapèzes. Dans les deux cas, on considère un entier naturel  $N \geq 1$  et une suite équi-répartie de points  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = a$  avec  $x_k = ka/N$  pour  $k = 0, \dots, N$ . Alors la méthode des rectangles à gauche donne la formule suivante d'approximation

$$I = \int_0^a f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = I_{N,\text{rectangle}},$$

et la méthode des trapèzes

$$I \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = I_{N,\text{trapeze}}.$$

- (1) Commençons par étudier la méthode des rectangles à gauche.
- (a) Représenter géométriquement la méthode des rectangles à gauche.
- (b) Si  $f$  est  $C^1$  monter l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{rectangle}}| \leq \frac{a^2}{2N} \max_{x \in [0,a]} |f'(x)|.$$

Pour rappel, comme  $f$  est supposée  $C^1$  alors  $f'$  est continue sur l'intervalle  $[0, a]$ . Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires alors  $f'$  est une fonction bornée et atteint ses bornes (autrement dit le max de l'inégalité précédente est bien défini).

- (2) Etudions à présent la méthode des trapèzes.
- (a) Représenter géométriquement la méthode des trapèzes.
- (b) Montrer que si  $f$  est  $C^2$  alors la formule, dite de Maclaurin, suivante

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2} (f(x_{k+1}) + f(x_k)) + \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)(x - x_{k+1}) f''(x) dx,$$

est vérifiée pour tout  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  (indication : IPP).

- (c) en déduire que si  $f$  est  $C^2$  alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_{N,\text{trapeze}}| \leq \frac{a^3}{12N^2} \max_{x \in [0,a]} |f''(x)|.$$

Même rappel que pour la question (1)(b) sur le max de  $f''$ .

**Exercice 3.** Dans cet exercice on considère plusieurs normes et ps.

- (1) Soit  $E = \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ).

- (a) Montrer que

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

est une norme. Pour  $n = 2$ , représenter l'ensemble des points  $x \in E$  vérifiant  $\|x\|_1 = 1$ .

- (b) Montrer que

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

est une norme. Toujours dans le cas  $n = 2$ , représenter l'ensemble des points  $x \in E$  vérifiant  $\|x\|_\infty = 1$ .

- (2) On considère à présent  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  où

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}, \quad \forall P, Q \in E.$$

- (a) Montrer que l'application est un produit scalaire sur  $E$ .  
 (b) Donner la définition de la norme associée à ce produit scalaire.

**Exercice 4.** Dans cet exercice on (re)travaille la notion d'orthogonalité dans un espace euclidien.

- (1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 1$ ) quelconque. On considère l'espace  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel (ou canonique) et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale. Montrer que

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Ce résultat vous fait-il penser à un théorème célèbre ?

- (2) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, P_2)$  avec

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \quad P_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1),$$

est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx, \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X].$$

**Exercice 5.** Le but de cet exercice est de démontrer (partiellement) le théorème dit de Fréchet-Von Neumann-Jordan. Voici son énoncé :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . La norme  $\|\cdot\|$  découle d'un produit scalaire si et seulement si  $\|\cdot\|$  vérifie

- (1)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in E.$

L'identité (1) est appelée identité du parallélogramme.

- (1) Démontrer dans un premier temps que si pour tout  $x \in E$  on a  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ , alors  $\|\cdot\|$  vérifie (1).  
 (2) On veut à présent démontrer l'implication inverse, i.e., que si  $\|\cdot\|$  vérifie (1) alors  $\|\cdot\|$  découle d'un produit scalaire. Pour ce faire on considère l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}, \quad \forall x, y \in E.$$

Dans la suite on **admet** que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vérifie

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E.$$

- (a) Montrer que  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$  (ainsi si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  on a bien  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ). Il reste à montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.  
 (b) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive, i.e.,  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in E$  et si  $\langle x, x \rangle = 0$  alors  $x = 0$ .  
 (c) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est symétrique, i.e.,  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  pour tout  $x, y \in E$ .

(d) Il faut à présent démontrer la bilinéarité de l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dans un premier temps, montrer que  $\| \cdot \|$  vérifie pour tout  $x, y$  et  $z \in E$  l'identité suivante

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2.$$

Pour ce faire, on applique plusieurs fois l'identité (1) à la quantité

$$\|x + y + z\|^2 = \left\| \frac{x + y}{2} + \frac{x + z}{2} + \frac{y + z}{2} \right\|^2.$$

En déduire que  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  pour tout  $x, y, z \in E$  et que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire.

(e) En déduire que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

(3) Est-ce que la norme  $\| \cdot \|_1$  (ou  $\| \cdot \|_\infty$ ) découle d'un produit scalaire ?

## 2. CHAPITRE 2

**Exercice 1.**

- (1) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique et continue par morceaux. On note  $f_N$  (pour  $N \geq 1$ ) la somme partielle d'ordre  $N$  de la série de Fourier de  $f$ , i.e.,

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) \exp\left(2i\pi n \frac{t}{a}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $f_N$  peut également s'écrire, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , sous la forme

$$f_N(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n(f) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) + b_n(f) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) \right),$$

avec

$$a_0(f) = 2c_0(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) dt,$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt,$$

$$b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{a}\right) dt.$$

Pour  $n \geq 1$ , montrer également les formules :

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2},$$

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

- (2) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique et continue par morceaux. Montrer que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+a} f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (3) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique et continue par morceaux. Montrer que
- si  $f$  est paire alors  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ ,
  - si  $f$  est impaire alors  $a_n(f) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.**

- (1) Calculer les sommes partielles d'ordre  $N \geq 1$ , notées  $f_N$ , des séries de Fourier des fonctions suivantes :

- (a)  $f$  est 2-périodique avec  $f(t) = |t|$  si  $|t| < 1$ ,
- (b)  $f$  est 1-périodique avec  $f(t) = t$  si  $t \in [0, 1[$ ,
- (c)  $f$  est  $2\pi$ -périodique avec  $f(t) = 1 - \frac{t^2}{\pi^2}$  si  $t \in [-\pi, \pi]$ ,
- (d)  $f(t) = |\sin(t)|$  (période de  $f$  ?),

(e)  $f(t) = \sin^3(t)$  (période de  $f$ ?).

- (2) Appliquer l'égalité de Parseval aux différentes fonctions  $f$  de la question précédente. En utilisant les fonctions des questions (1)(b) et (1)(c), en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

### Exercice 3.

- (1) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique et continue par morceaux. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé et soit  $g$  la fonction  $a$ -périodique avec  $g(t) = f(t - \alpha)$ . Quelle relation existe entre  $c_n(g)$  et  $c_n(f)$  ?
- (2) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique de classe  $C^1$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a} c_n(f).$$

En déduire l'existence d'une constante  $M > 0$  telle que

$$(2) \quad |c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On suppose à présent  $f$  de classe  $C^2$ . Montrer l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la série  $\sum |c_n(f)|$  si  $f$  est  $C^2$  ?

- (3) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique continue et  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Montrer dans ce cas que l'inégalité (2) est toujours vérifiée. Que peut-on dire si  $f$  est  $C^k$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  avec  $f, f', \dots, f^{k-1}$  continues sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 4.** On considère les fonctions de l'exercice 2 question (1). Les séries de Fourier de ces fonctions convergent-elles simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ? Si oui pourquoi ? Si ce n'est pas le cas préciser vers quelle valeur tend  $(f_N(x))_{N \geq 1}$ . Enfin quelles séries de Fourier convergent normalement vers la fonction initiale sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 5 (Exercice de synthèse 1).** Soit  $f$  la fonction 2-périodique avec

$$f(x) = x(1-x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

que l'on prolonge par imparité sur  $[-1, 0]$ .

- (1) Représenter le graphe de  $f$ .
- (2) Calculer les coefficients de Fourier  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$ . Donner l'expression de la somme partielle d'ordre  $N \geq 1$ , notée  $f_N$ , de la série de Fourier de  $f$ .
- (3) Étudier la convergence simple de la suite  $(f_N)_{N \geq 1}$  sur  $\mathbb{R}$ . Peut-on dire que  $f$  est développable en sa série de Fourier en tout point de  $\mathbb{R}$  ?

- (4) Est-ce que la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ?  
 (5) Justifier la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Exercice 6 (Exercice de synthèse 2).** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique et impaire avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \pi. \end{cases}$$

- (1) Représenter le graphe de  $f$ .  
 (2) Calculer les coefficients de Fourier  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$ . Donner l'expression de la somme partielle d'ordre  $N \geq 1$ , notée  $f_N$ , de la série de Fourier de  $f$ .  
 (3) Etudier la convergence simple de la suite  $(f_N)_{N \geq 1}$  sur  $\mathbb{R}$ . Peut-on dire que  $f$  est développable en sa série de Fourier en tout point de  $\mathbb{R}$  ?  
 (4) Est-ce que la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 7.** Développer en séries de Fourier la fonction  $f$  de période 2, définie sur  $[-1, 1[$  par

$$f(t) = \cos(\pi zt) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En déduire les égalités :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

**Exercice 8.** Soient  $x$  un paramètre réel strictement positif donné et  $f$  une fonction périodique définie par

$$f(t) = e^{xe^{it}}.$$

- (1) Période de  $f$  ? En admettant que  $c_0(f) = 1$ , montrer que

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \frac{x^n}{n!} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

- (2) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2x \cos(t)} dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

**Exercice 9 (Développement en série de cosinus et sinus).** Soit  $f$  la définie sur  $]0, 1[$  par

$$f(x) = x \quad \forall x \in ]0, 1[.$$

- (1) Prolongez la fonction  $f$  sur  $] - 1, 1[$  par imparité, puis prolongez  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par 2 périodicité. On note  $f_1$  la prolongation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Représentez le graphe de  $f_1$ . Développer en séries de Fourier  $f_1$
- (2) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 2. Que constatez-vous ?

## 3. CHAPITRE 3

**Exercice 1 (TFD).**

- (1) Soit le vecteur  $x$  avec  $x = (1, 2, 4, 3)^\top$ . Calculer la TFD du vecteur  $x$ .
- (2) Soit le vecteur  $y$  avec  $y = (10, (-3 - i), 0, (-3 + i))^\top$ . Calculer et commenter la TFD du vecteur  $y$ .
- (3) Soit le vecteur  $x \in \mathbb{C}^{10}$  dont les 5 premiers coefficients valent 1 et les 5 autres 0. Calculer la TFD de  $x$ .

**Exercice 2 (TFD et TFDI).** On considère le vecteur  $x$  de taille  $N \geq 1$  avec

$$x_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

- (1) Calculer la TFD, le vecteur noté  $X$ , de  $x$ .
- (2) Calculer la TFDI de  $X$ .

**Exercice 3 (Égalité de Plancherel discrète)**

- (1) Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire hermitien sur  $\mathbb{C}^N$  :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \bar{y}_n \quad \text{pour } x = (x_0, \dots, x_{N-1})^\top, y = (y_0, \dots, y_{N-1})^\top \in \mathbb{C}^N.$$

- (2) Soient  $X$  et  $Y \in \mathbb{C}^N$  les vecteurs obtenus à partir de deux vecteurs  $x$  et  $y \in \mathbb{C}^N$  par DFT. Justifier la relation suivante

$$\frac{1}{N} \langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

**Exercice 4 (vecteurs périodiques, convolution et TFD).** Pour rappel, un vecteur  $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  est  $N$  périodique ( $N \geq 1$ ) si

$$x_{k+\ell N} = x_k \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}, k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Par ailleurs, pour deux vecteurs  $x$  et  $y$  étant  $N$  périodiques on définit la convolution périodique d'ordre  $N$  de  $x$  et  $y$  par

$$(x *_N y)_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_{k-\ell} y_\ell, \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Enfin pour un vecteur  $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  supposé  $N$  périodique on appelle Transformée de Fourier du signal périodique à temps discret de  $x$  le vecteur noté  $X$  avec

$$(3) \quad X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega_N^{-nk}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si la définition précédente n'est pas exactement la TFD on continuera tout de même (par abus de langage) à appeler  $X$  la TFD de  $x$ . Cet abus est justifié par le résultat démontré dans la première question de l'exercice.

- (1) Soit  $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  un vecteur  $N$  périodique. Justifier que le vecteur  $X \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  obtenu via (3) est  $N$  périodique.
- (2) Soient  $x$  et  $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  deux vecteurs  $N$  périodiques. Justifier que  $x *_N y$  est  $N$  périodique.
- (3) Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs 2 périodiques avec  $(x_0, x_1) = (1, 2)$  et  $(y_0, y_1) = (1, -1)$ .
  - (a) Déterminer le vecteur 2 périodique  $x *_2 y$  par un calcul direct.
  - (b) Calculer les TFD, notées  $X$  et  $Y$ , des vecteurs  $x$  et  $y$ .
  - (c) En déduire l'expression du vecteur  $x *_2 y$  en utilisant  $X$  et  $Y$ .

## 4. CHAPITRE 4

**Exercice 1.** Dire si les propriétés suivantes sont vraies partout sur  $\mathbb{R}$  ou presque partout sur  $\mathbb{R}$ .

- (1) Les fonctions  $x \mapsto |x|$  et  $x \mapsto \sqrt{x^2}$  sont égales ... sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Les fonctions  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto -x^2$  ne sont pas égales ... sur  $\mathbb{R}$ .
- (3) La fonction  $x \mapsto 1/(1+x)^2$  est continue ... sur  $\mathbb{R}$ .
- (4) La fonction  $x \mapsto 1/x$  est continue ... sur  $\mathbb{R}$ .
- (5) La fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable ... sur  $\mathbb{R}$ .
- (6) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique et paire avec

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$

est continue ... sur  $\mathbb{R}$  et dérivable ... sur  $\mathbb{R}$ .

- (7) Soient  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $f = \mathbf{1}_A$ . La quantité  $f(x)$  est plus petite ou égale à 1 ... dans  $\mathbb{R}$ . La quantité  $f(x)$  est strictement plus petite que 1 ... dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.**

- (1) Soit  $f$  une fonction constante sur  $\mathbb{R}$ , est-ce que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^1(0, +\infty)$  ou  $L^1(0, 1)$  ?
- (2) Soit  $\alpha > 1$ , montrer que la fonction  $x \mapsto x^{-\alpha}$  appartient à l'espace  $L^1(a, +\infty)$  pour  $a > 0$ . Est-ce que cette fonction appartient à  $L^1(0, a)$  ( $a > 0$ ) ?
- (3) Soit  $0 < \alpha < 1$ , montrer que la fonction  $x \mapsto x^{-\alpha}$  appartient à l'espace  $L^1(0, b)$  pour  $b > 0$ . Est-ce que cette fonction appartient à  $L^1(b, +\infty)$  ( $b > 0$ ) ?
- (4) Montrer que la fonction  $x \mapsto 1/x$  n'appartient ni à  $L^1(0, 1)$  ni à  $L^1(1, +\infty)$ .
- (5) Est-ce que la fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$  appartient à  $L^1(-1, 1)$ .
- (6) Démontrer que la fonction  $x \mapsto \sin(x)/x$  n'appartient pas à  $L^1(0, +\infty)$ .
- (7) Soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle  $[a, b]$  fermé et borné de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f \in L^1(a, b)$ .
- (8) Soit  $f$  une fonction  $a$ -périodique non nulle et continue. Montrer que  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 3.** Dans cet exercice on veut étudier la convergence ou la non convergence des séries de Riemann.

- (1) Montrer que si  $\alpha > 1$  la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge.
- (2) Montrer que si  $0 < \alpha \leq 1$  la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  ne converge pas.

**Exercice 4.** Dans cet exercice le but est de manipuler le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

- (1) Calculer la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$ .
- (2) Calculer la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{(1+x^2)} dx$ .
- (3) Soit  $f_n(x) = \frac{1}{1+|x|^{2+1/n}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \geq 1$ .

(a) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$ .

(b) Soit  $g_n(t) = n f_n(nt)$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a g_n(t) dt$ , pour  $a > 0$ .

(4) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions avec

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{1+x^{2n}} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/3} f_n(x) dx.$$

(5) Soit  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  pour tout  $x \geq 0$  et  $n \geq 1$ .

(a) Démontrer que, pour tout  $x \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$  et que  $f_n(x) \leq e^x$  ( $n \geq 1$ ).

(b) En déduire la limite de  $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-3x} dx$ .

## 5. CHAPITRE 5

**Exercice 1.**(Transformée de Fourier) Justifier que les fonctions suivantes sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  puis calculer leurs transformée de Fourier.

(1) Soit  $f_1$  la fonction définie par  $f_1(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$  avec  $a$  un réel strictement positif.

(2) Soit  $f_2$  la fonction triangle définie par

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Soit  $f_3$  la fonction exponentielle causale définie par

$$f_3(x) = H(x) e^{-ax}, \quad a > 0,$$

où  $H$  désigne la fonction de Heaviside.

(4) Soit  $f_4$  la fonction exponentielle causale définie par

$$f_4(x) = H(-x) e^{ax}, \quad a > 0.$$

(5) Soit  $f_5$  la fonction définie par

$$f_5(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x), \quad k \geq 1, a > 0.$$

(6) Soit  $f_6$  la fonction définie par

$$f_6(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

(7) Soit  $f_7$  la fonction définie par

$$f_7(x) = \text{sign}(x) e^{-a|x|}, \quad a > 0,$$

où  $\text{sign}$  est la fonction signe donnée par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(8) Soit  $f_8$  la fonction sinusoidale amortie et causale définie par

$$f_8(x) = \sin(2\pi x) e^{-ax} H(x), \quad a > 0.$$

(9) Soit  $f_9$  la fonction gaussienne définie par

$$f_9(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0.$$

Ici pour calculer  $\widehat{f}_9$  il faut dans un premier temps établir une équation différentielle d'ordre un vérifiée par  $f_9$ . Par ailleurs pour obtenir l'expression de  $\widehat{f}_9$  on admettra que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

**Exercice 2.**(Utilisation de l'inverse de la transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$ ) En utilisant la formule d'inversion de Fourier (en la justifiant) et l'exercice 1 calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

- (1) Soit  $g_1$  la fonction définie par

$$g_1(x) = \frac{1}{(a + 2i\pi x)^{k+1}}, \quad a > 0, k \geq 1.$$

- (2) Soit  $g_2$  la fonction définie par

$$g_2(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- (3) Soit  $g_3$  la fonction définie par

$$g_3(x) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}.$$

**Exercice 3.**(Convolution et transformée de Fourier) Le but de cet exercice est de manipuler le produit de convolution.

- (1) Soit  $h_1$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_1(t) = (\sin * \mathbf{1}_{[-a,a]})(t)$  avec  $a > 0$ . Justifier que  $h_1$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et calculer explicitement  $h_1$ .
- (2) Soit  $h_2 = f * g$  où  $f$  et  $g$  sont nulles respectivement hors de l'intervalle  $[a, b]$  et hors de  $[c, d]$ . Justifier que  $h_2$  est nulle hors de  $[a + c, b + d]$ . En déduire que si  $f$  et  $g$  sont causales (nulles sur  $\mathbb{R}_-$ ) alors  $h_2$  est causale.
- (3) Soit  $h_3$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  comme le produit de convolution de deux fonctions exponentielles décroissantes causales, i.e.,

$$h_3(t) = \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-ax} H(t-x)e^{-b(t-x)} dx,$$

avec  $a$  et  $b > 0$ . Justifier que  $h_3$  est bien définie et calculer explicitement  $h_3$  (on utilisera la question précédente).

- (4) Soit  $h_4$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h_4(t) = \frac{1}{2\pi ab} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2b^2}} dx,$$

avec  $a$  et  $b > 0$ . Justifier que  $h_4$  est bien définie et calculer explicitement  $h_4$  (utiliser le lien entre convolution et transformée de Fourier ainsi que l'exercice 1).

**Exercice 4.**(Transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ )

- (1) Montrer que la convolution de deux fonctions ayant la même parité est paire.
- (2) Démontrer que la transformée de Fourier et la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction paire coïncident.

- (3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  comme le produit de convolution de deux fonctions sinus cardinal, i.e.,

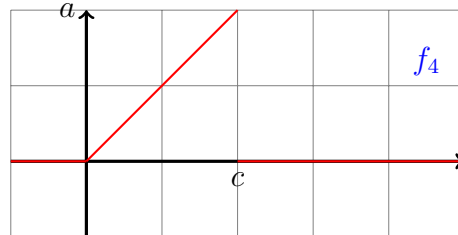
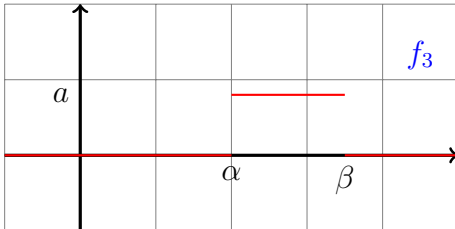
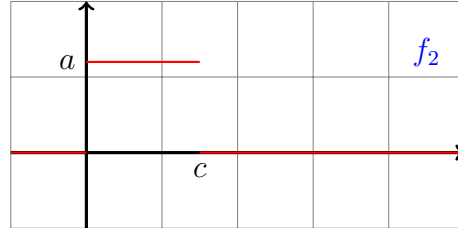
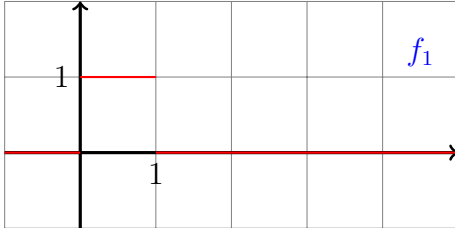
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi at)}{\pi t} \frac{\sin(\pi b(x-t))}{\pi(x-t)} dt,$$

avec  $a$  et  $b > 0$ . Justifier que  $f$  est bien définie et calculer  $f$  explicitement en utilisant l'exercice 1 et la Proposition 25 du cours.

## 6. CHAPITRE 6

**Exercice 1.**(Transformée de Laplace)

- (1) En exprimant les différentes fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  en fonction de la fonction de Heaviside, calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :



**Exercice 2.**(Transformée de Laplace et EDO) Déterminer les solutions des EDO ci-dessous par la méthode de Laplace. Pour ce faire on utilisera les formules d'inversion suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+a} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at}, \\ \frac{1}{(p+a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} te^{-at}, \\ \frac{p}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos(at), \\ \frac{1}{p^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a} \sin(at), \\ \frac{1}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a} e^{-bt} \sin(at), \\ \frac{p+b}{(p+b)^2+a^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-bt} \cos(at). \end{aligned}$$

- (1) On considère l'équation du premier ordre :

$$x'(t) + x(t) = e^t, \quad t > 0,$$

avec  $x(0) = 1$ .

(2) On considère l'équation du deuxième ordre :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t}, \quad t > 0,$$

avec  $x(0) = 1$  et  $x'(0) = 0$ .

(3) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction  $t \mapsto \sin(t)H(t)$  puis déterminer la solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin(t), \quad t > 0,$$

avec  $x(0) = 1$  et  $x'(0) = 0$ .

(4) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction  $t \mapsto H(t)$  puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + x(t) = 1, \quad \forall t > 0,$$

avec  $x(0) = x'(0) = 0$ .

(5) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction  $t \mapsto \cos(t)$  puis déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \cos(t), \quad \forall t > 0,$$

avec  $x(0) = 1$  et  $x'(0) = 0$ .

(6) On considère le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) - x(t) + y(t) = e^t, \end{cases}$$

pour  $t > 0$  et avec  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$ .

(7) On considère l'équation différentielle d'ordre 3 linéaire suivante :

$$x^{(3)}(t) + x(t) = 0, \quad t > 0,$$

avec  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 3$  et  $x''(0) = 8$ .