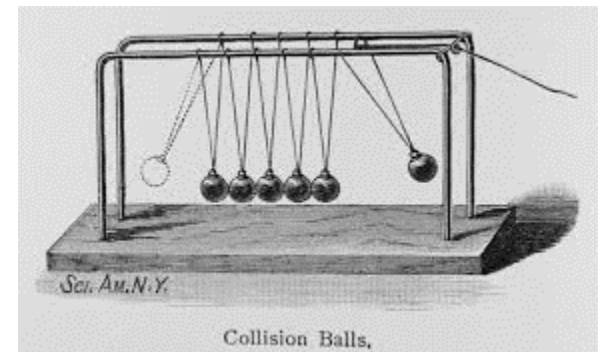
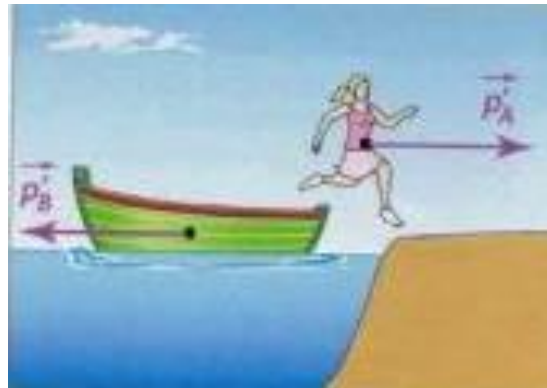
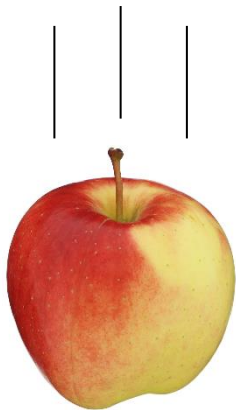


Rappels de mécanique



Les lois de la mécanique

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

La physique aristotélicienne (*Grèce antique*)

- Les objets se déplacent naturellement vers leurs lieux d'origine
 - « La pierre tombe car elle vient de la Terre »
 - « Le feu s'élève car il vient de l'air »
- Un choc entre deux objets provoque leur mouvement
- Mais... pourquoi une pierre lancée en l'air continue son mouvement avant de retomber ?

L'impetus (au moyen âge, vers le VI^{ème} siècle)

- « L'action initiale effectuée sur la pierre lui communique un **impetus**, et c'est cet **impetus** qui entretient le mouvement »
- « L'**impetus** perd peu à peu de sa force à cause de la pénétration de la pierre dans le milieu aérien, et une fois cet **impetus** épuisé, la pierre prend son mouvement naturel et tombe. »

► Puis Newton et ses lois du mouvement au XVII^{ème} siècle...

1) Principe d'inertie

- **Version d'origine** : « *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.* »
- **Version actuelle** : « *Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie G d'un système est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul.* »

$$\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{0} \text{ ssi } \sum \vec{F}_G = \vec{0}$$

2) PFD : Principe fondamental de la dynamique de translation

- **Version d'origine** : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »
- **Version actuelle** : « Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement \vec{p} est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide. »

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

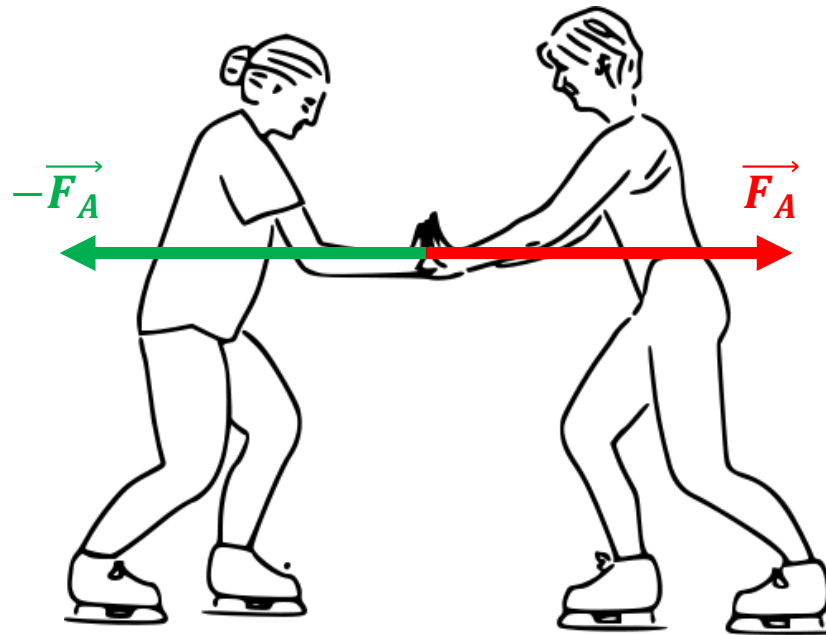
- Très souvent, la masse est constante et on obtient :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- $\vec{\gamma}$ étant l'accélération du centre d'inertie

3) Principe d'action-réaction

- **Version d'origine** : « L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires. »
- **Version actuelle** : « Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B. »



Forces usuelles en SY03

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

Cas d'un roulement sur le sol

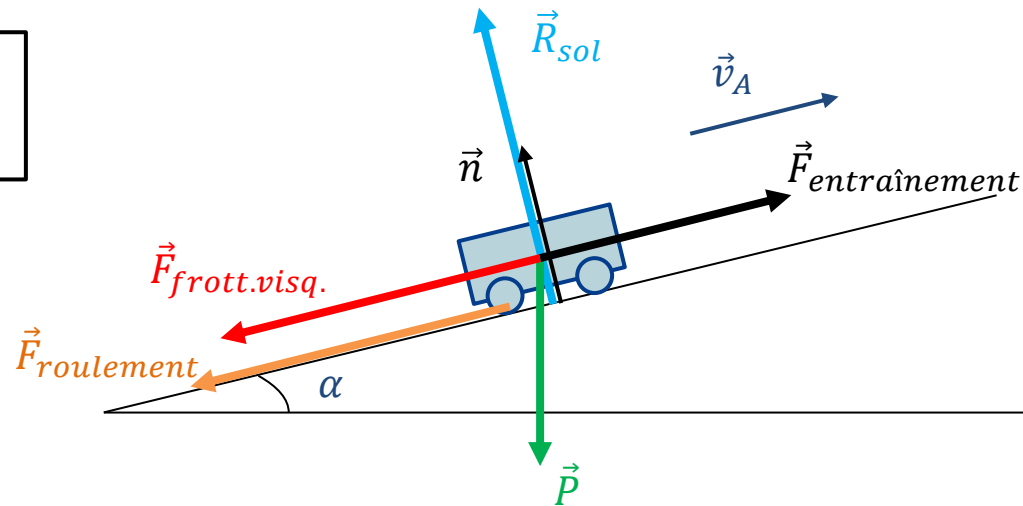
A ne pas oublier !



- On isole le chariot
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Réaction du sol : $\vec{R}_{sol} = P \cdot \cos \alpha \cdot \vec{n}$ (\vec{n} : vecteur unitaire normal au sol)
- Résistance au roulement : $\vec{F}_{roulement} = C_r \cdot |\vec{R}_{sol}| \cdot \left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$
- Frottements visqueux : $\vec{F}_{roulement} = \frac{1}{2} \rho \cdot SC_x \cdot |\vec{v}_A|^2 \cdot \left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$
- Force d'entraînement : « variable »

$$M \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

(dynamique)

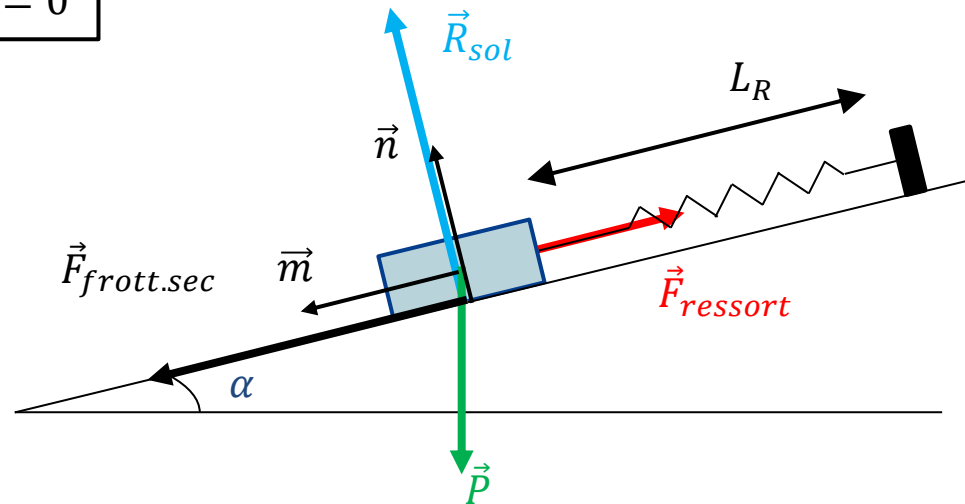


Cas de masse et ressort statiques sur un plan incliné

- On isole la masse
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Réaction du sol : $\vec{R}_{sol} = N.\vec{n} = P.\cos\alpha.\vec{n}$ (\vec{n} : vecteur unitaire normal au sol)
- Frottements sec : $\vec{F}_{frott.sec} = \mu_S.N.\vec{m} = \mu_S.P.\cos\alpha.\vec{m}$ (\vec{m} : vecteur unitaire)
- Rappel du ressort : $\vec{F}_{ressort} = k.\Delta L = k.(L_R - L_{vide})$

$$\vec{P} + \vec{R}_{sol} + \vec{F}_{frott.sec} + \vec{F}_{ressort} = \vec{0}$$

(statique)

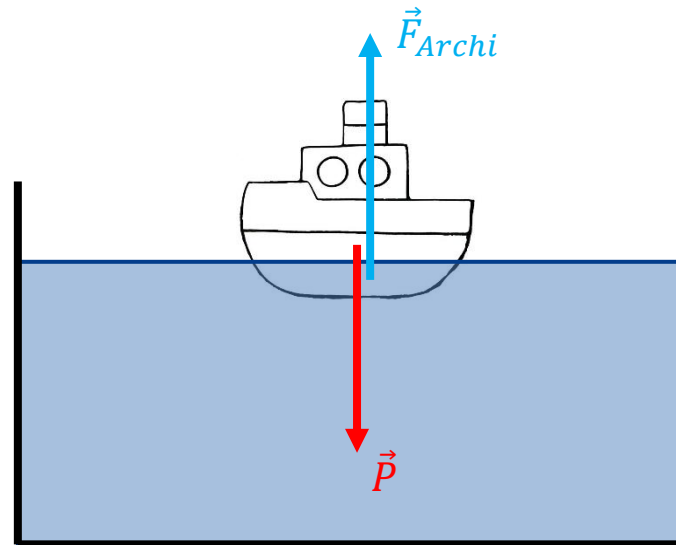


Cas d'un bateau à l'arrêt

- On isole le bateau
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_{Archimède} = -M_f \cdot \vec{g} = -\rho \cdot V_f \cdot \vec{g}$
- Equilibre lorsque le volume d'eau déplacé = le poids du bateau

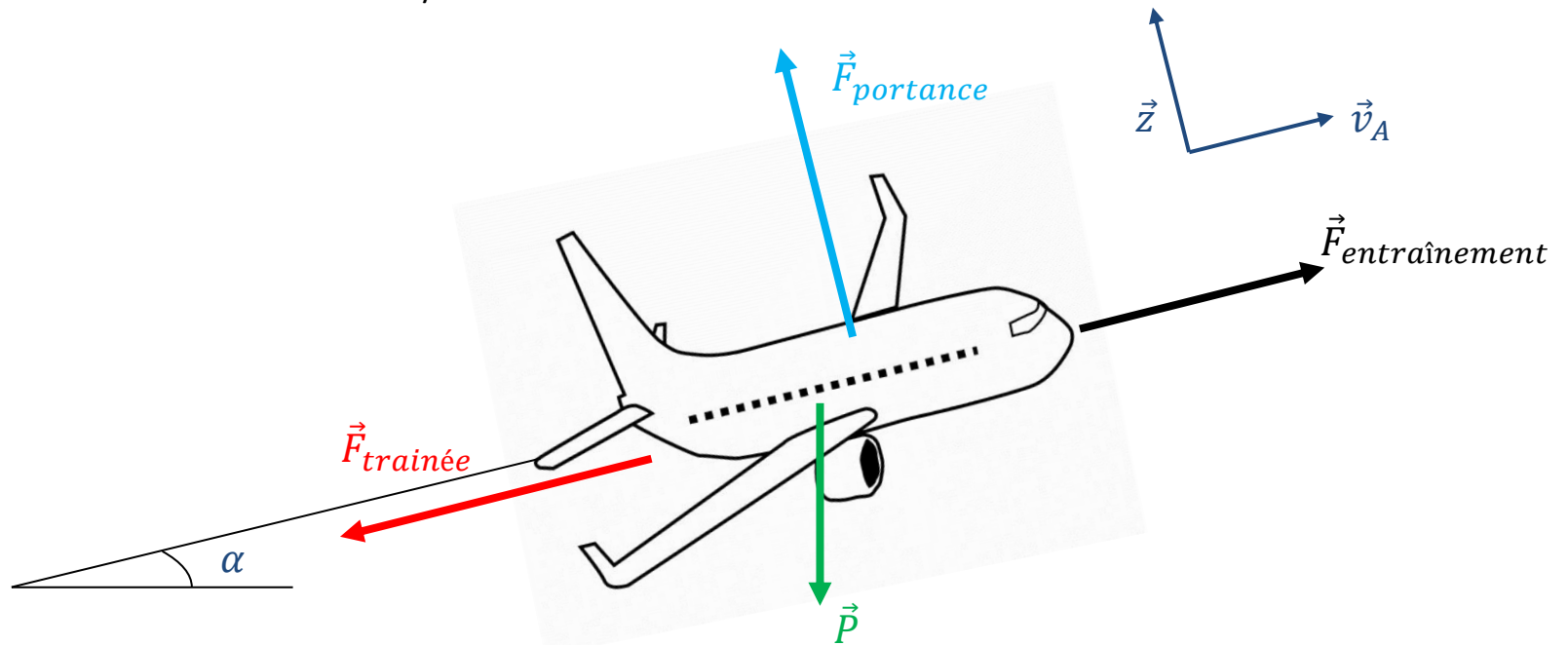
$$\vec{P} + \vec{F}_{Archimède} = \vec{0}$$

(statique)



Cas d'un avion

- On isole l'avion (*attention : tout se fait par rapport au référentiel de l'air*)
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Trainée aérodynamique : $F_{trainée} = \frac{1}{2}\rho \cdot S_x C_x \cdot |\vec{v}_A|^2 \cdot \left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$ (S_x : surface frontale)
- Portance : $\vec{F}_{portance} = \frac{1}{2}\rho \cdot S_z C_z \cdot |\vec{v}_A|^2 \cdot \vec{z}$ (S_z : surface des ailes)
- Poussée des réacteurs/hélices : « variable »



Mise en application du PFD

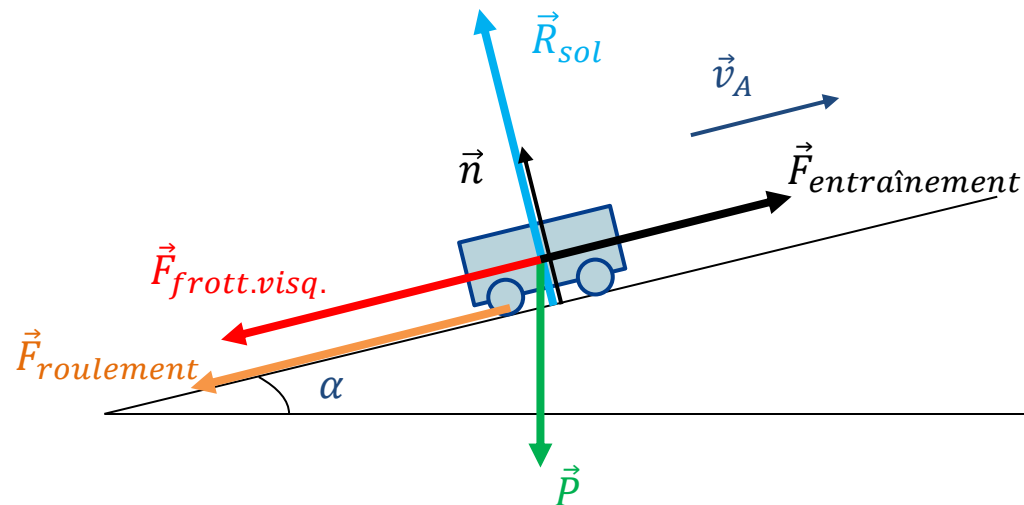
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

Roulement sur le sol

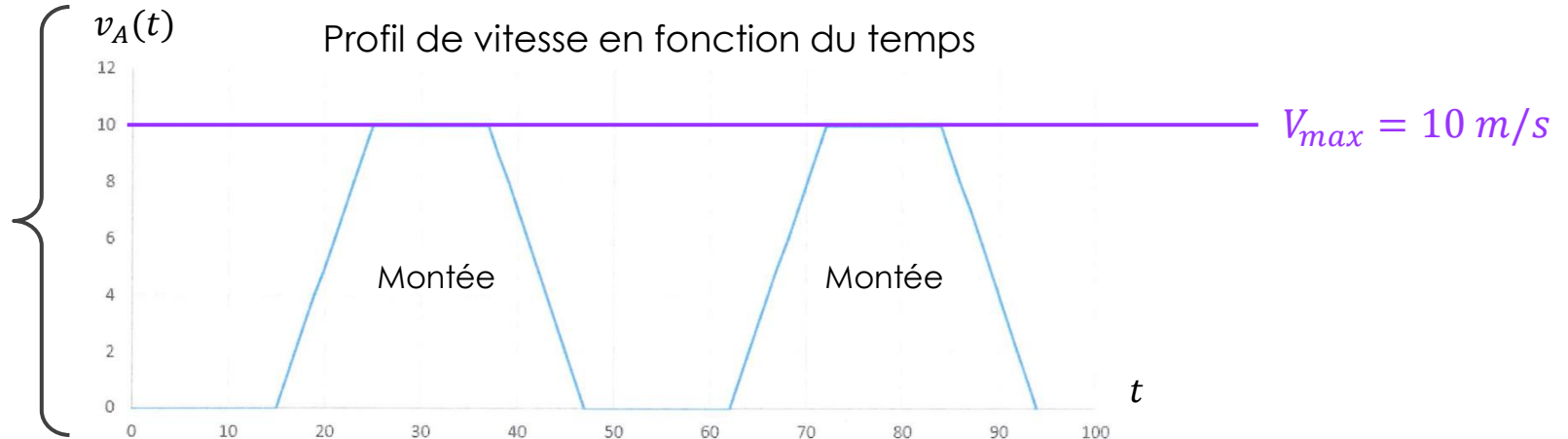
- On isole le chariot
- On cherche à déterminer $\vec{F}_{entra\hat{m}ement}$
- PFD : $M \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{F}_{entra\hat{m}ement} + \vec{R}_{sol} + \vec{F}_{frott.visqueux} + \vec{F}_{roulement} + \vec{P}$
- Projection selon l'axe de \vec{v}_A :
- $M \frac{dv_A}{dt} = F_{entra\hat{m}ement} - \frac{1}{2} \rho \cdot SC_x \cdot v_A^2 - C_r \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha - M \cdot g \cdot \sin \alpha$
- On obtient : $F_{entra\hat{m}ement} = M \frac{dv_A}{dt} + \frac{1}{2} \rho \cdot SC_x \cdot v_A^2 + M \cdot g \cdot (C_r \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$



Roulement sur le sol : poursuite du calcul

- $F_{entra\hat{i}nement} = M \frac{dv_A}{dt} + \frac{1}{2} \rho \cdot S C_x \cdot v_A^2 + M \cdot g \cdot (C_r \cdot \sin \alpha + \cos \alpha)$

Issu du cahier des charges



- Calcul de $F_{entra\hat{i}nement}$ au cours du temps ?
 - Accès à v_A et aussi à sa dérivée temporelle $\frac{dv_A}{dt}$
 - Accès aux données : M, ρ, S, C_x , etc.
- Calcul de la puissance et de l'énergie à la roue p_R au cours du temps ?
 - $p_R(t) = v_A(t) \times F_{entra\hat{i}nement}(t)$
 - $E = \int p_R(t) \cdot dt$

Application à des rotations

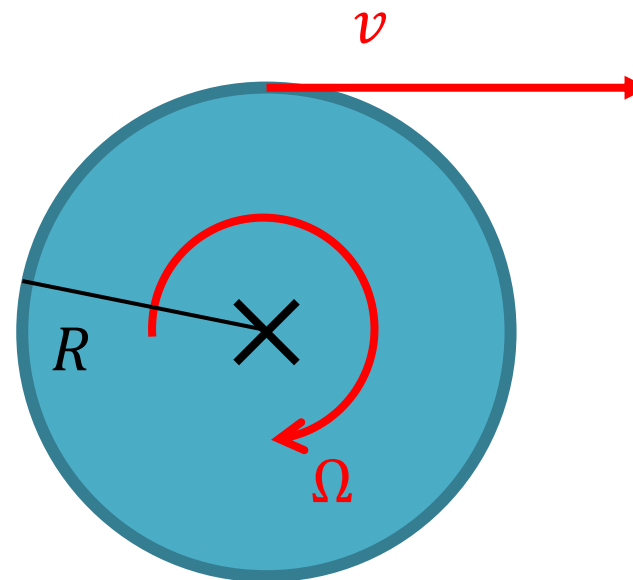
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

Liens entre rotation et translation : cinétique

- Vitesse tangentielle : $v = R \times \Omega$
- Accélération : $\frac{dv}{dt} = R \times \frac{d\Omega}{dt}$

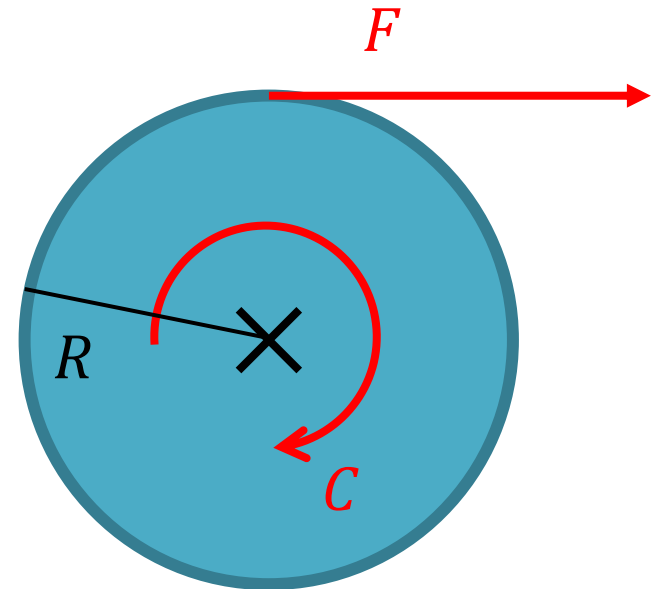


Liens entre rotation et translation : efforts et puissance

- Force tangentielle : $F = C/R$
- Puissance : $F \times v = \frac{C}{R} \times \Omega \times R = C \times \Omega$
- ~~Masse~~ => Moment d'inertie (kg.m^2) :

Formule générale : $J = \int r^2 \cdot dm$

Cas de plusieurs solides : $J = \sum m_i \cdot r_i^2$



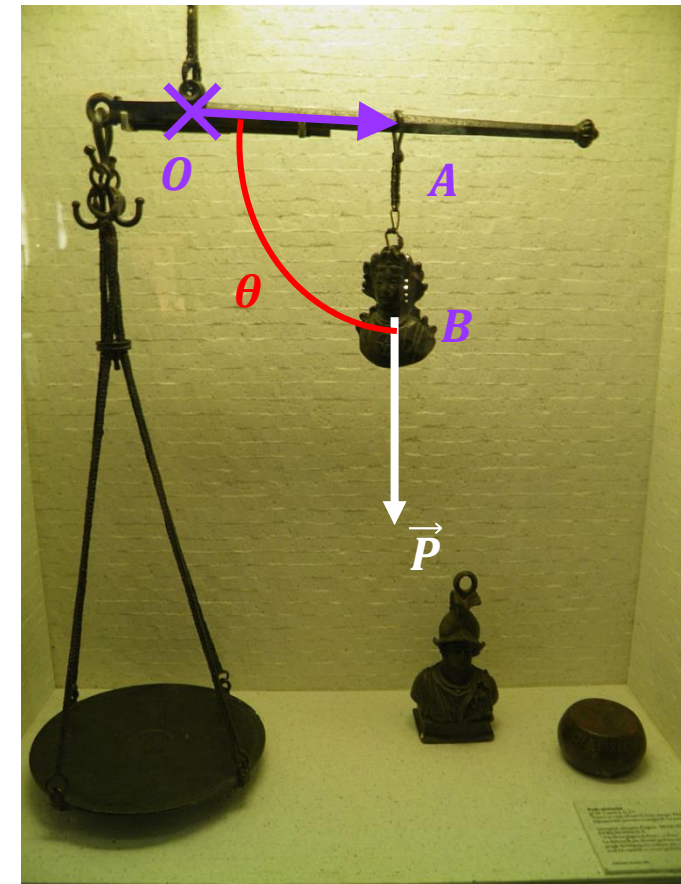
PFD en rotation

$$J \frac{d\vec{\Omega}_O}{dt} = \sum \vec{C}_{ext}$$

- J : inertie de rotation
- \vec{C}_{ext} : couples extérieurs

Lien entre force et couple

- Moment scalaire de \vec{P} par rapport au point O :
- $M_P = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{P}\| \cdot \sin \theta$
- Inertie équivalente à la masse m lorsqu'elle tourne autour du point O :
- $J_m = m \cdot [\|\vec{OA}\| + \|\vec{AB}\| \cdot \sin \theta]^2$



Balance romaine

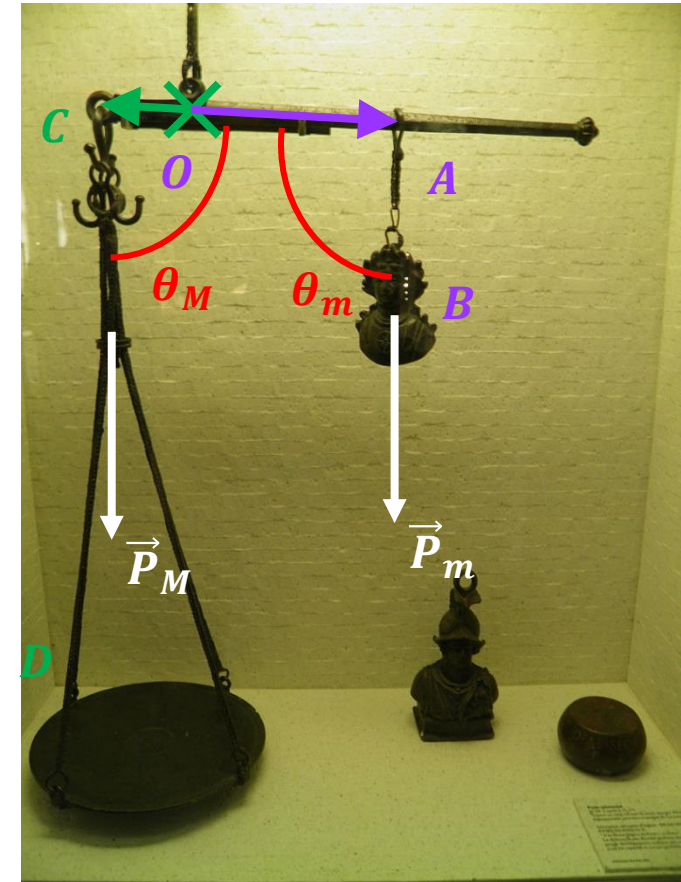
PFD en rotation

$$J \frac{d\vec{\Omega}_O}{dt} = \sum \vec{C}_{ext}$$

- Couple et inertie associés à la masse m :
- $C_m = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{P}\| \cdot \sin \theta_m$
- $J_m = m \cdot [\|\vec{OA}\| + \|\vec{AB}\| \cdot \sin \theta_m]^2$
- Couple et inertie associés à la masse M :
- $C_M = \|\vec{OC}\| \cdot \|\vec{P}_M\| \cdot \sin \theta_M$
- $J_M = M \cdot [\|\vec{OC}\| + \|\vec{CD}\| \cdot \sin \theta_M]^2$
- **Bilan :**

$$\frac{d\vec{\Omega}_O}{dt} = \frac{OA \cdot P_m \cdot \sin \theta_m - OC \cdot P_M \cdot \sin \theta_M}{J_m + J_M}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_O}{dt} \approx \frac{OA \cdot P_m - OC \cdot P_M}{J_m + J_M}$$



Balance romaine

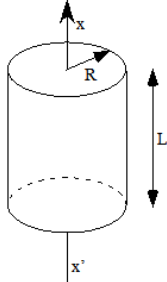
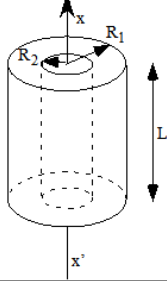

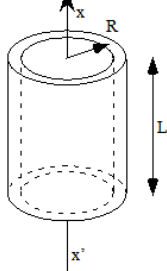
Moments d'inertie

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

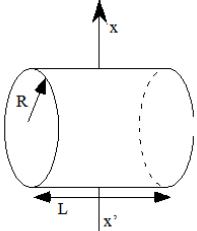
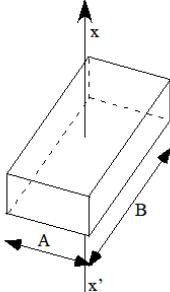
www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

Quelques moments d'inertie classiques

		Moment d'inertie
Cylindre plein		$J = \frac{1}{2} M R^2$
Cylindre annulaire		$J = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$ 
Cylindre annulaire mince		$J = M R^2$

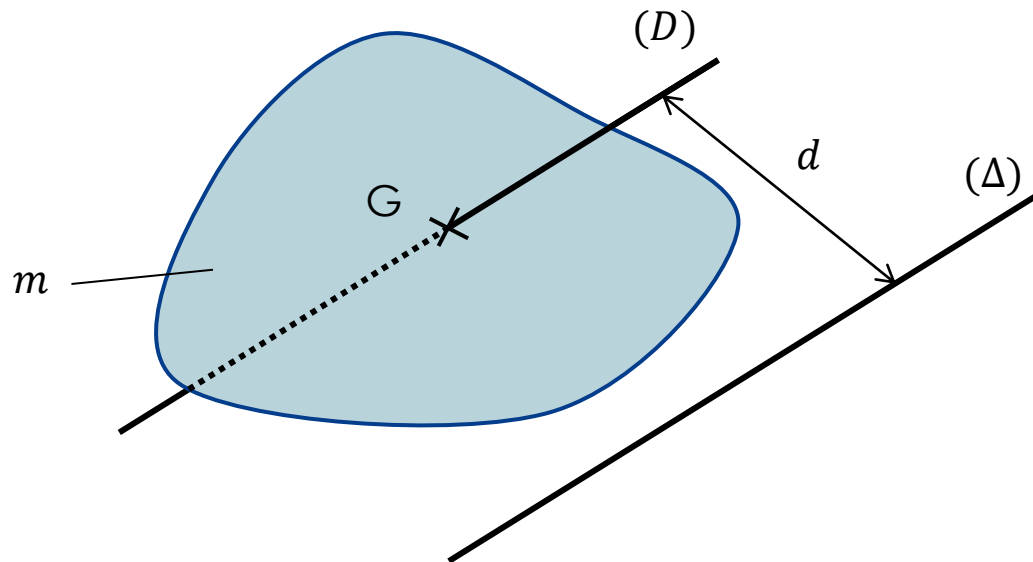
Quelques moments d'inertie classiques

		Moment d'inertie
Cylindre plein transverse		$J = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{L^2}{3} \right)$
Parallélépipède rectangle		$J = \frac{1}{12} M (A^2 + B^2)$

Théorème de Huygens

- Soit un solide de masse m et deux axes parallèles dont l'un, noté (D) , passe par le centre de masse G et le second, noté (Δ) , lui est distant de d .
- Leurs moments d'inertie respectifs sont reliés par le théorème de Huygens :

$$J_{/\Delta} = J_{/D} + m d^2$$



Systemes comprenant plusieurs éléments

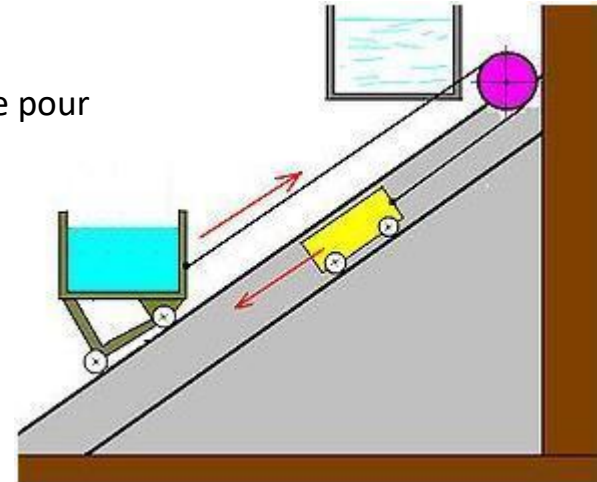
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cours SY03 : rappels de mécanique

Système comprenant plusieurs éléments

- Cas d'un chariot sur une pente avec une poulie et un contrepoids
- On cherche à évaluer le couple que doit fournir la poulie pour entraîner le chariot
- Il faut repérer et isoler les différents solides
- Chaque solide fournit des équations
- L'ensemble des équations permet de résoudre le problème



Isoler un solide

- Isolement du chariot de masse m_{ch}
- $m_{ch} \frac{d\vec{v}_{ch}}{dt} = \vec{T}_{ch} + \vec{R}_{ch} + \vec{F}_{fv\ ch} + \vec{F}_{roul\ ch} + \vec{P}_{ch}$

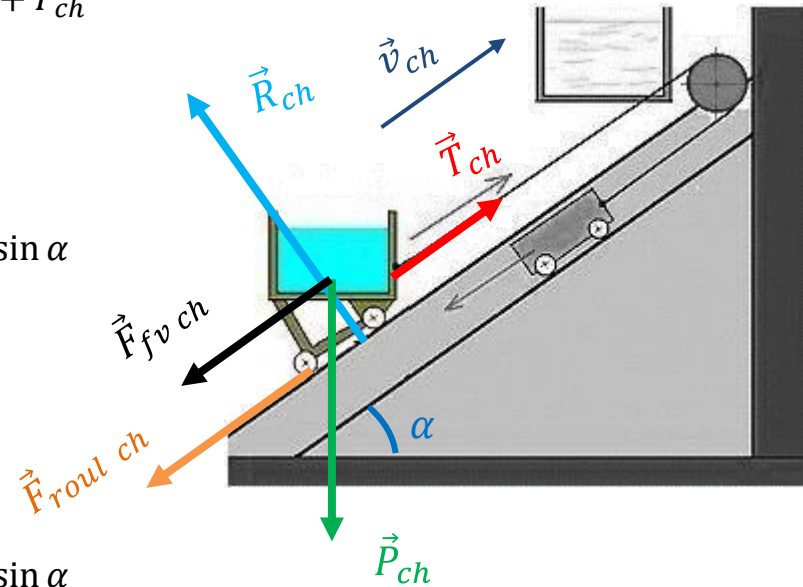
- Projection selon l'axe du déplacement

- $m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} = T_{ch} - F_{fv\ ch} - F_{roul\ ch} - P_{ch} \sin \alpha$

- Ceci nous permet d'exprimer T_{ch}

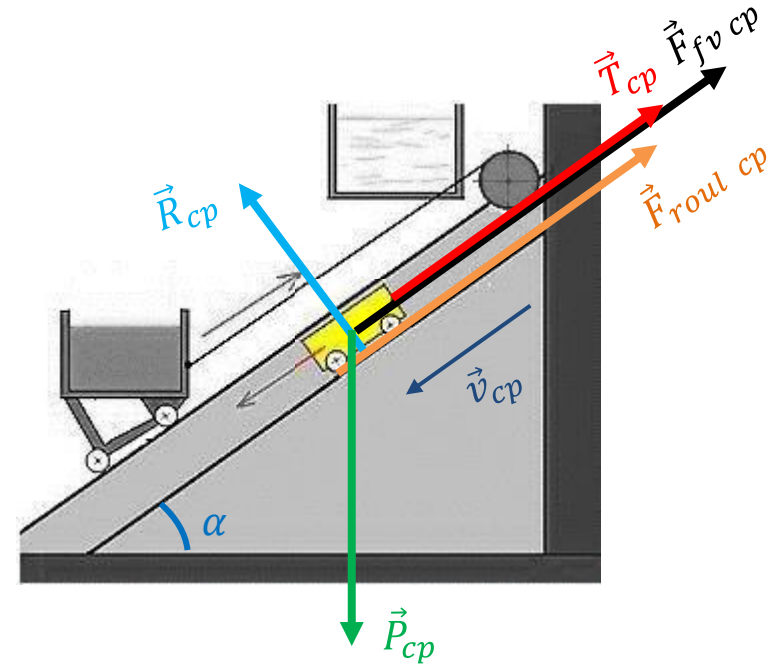
- $T_{ch} = m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin \alpha$

- **Nous pouvons maintenant isoler le contre poids**



Isoler un solide

- Isolement du contrepoids de masse m_{cp}
- $m_{cp} \frac{d\vec{v}_{cp}}{dt} = \vec{T}_{cp} + \vec{R}_{cp} + \vec{F}_{fv\ cp} + \vec{F}_{roul\ cp} + \vec{P}_{cp}$
- Projection selon l'axe du déplacement
- $m_{ch} \frac{dv_{cp}}{dt} = -T_{cp} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp} \sin \alpha$
- Ceci nous permet d'exprimer T_{ch}
- $T_{cp} = -m_{ch} \frac{dv_{cp}}{dt} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp} \sin \alpha$
- **Nous pouvons maintenant isoler la poulie**



Isoler un solide

- Isolement de la poulie de rayon r_p et d'inertie J_p (*frottements négligés*)

$$J_p \frac{d\vec{\Omega}_p}{dt} = \vec{C}_p + \vec{C}_{T_1} + \vec{C}_{T_2} + \vec{C}_{R_p} + \vec{C}_{P_p}$$

- Projection selon l'axe de la poulie

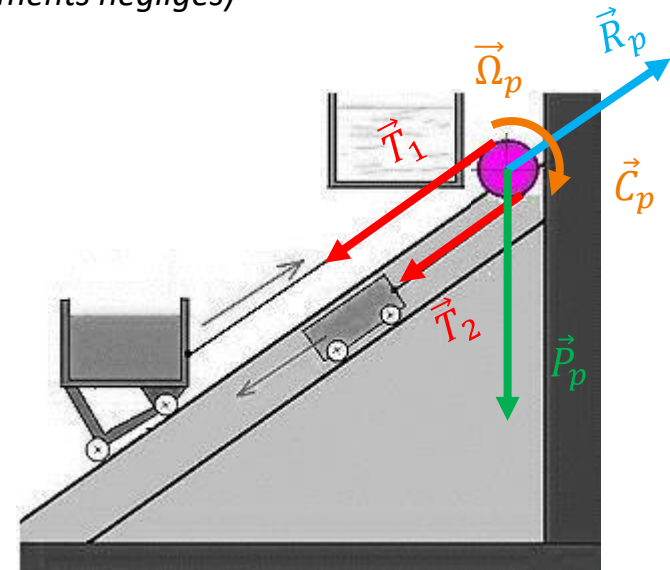
$$J_p \frac{d\Omega_p}{dt} = C_p - r_p \times T_1 + r_p \times T_2$$

- Ceci permet d'exprimer C_p

$$C_p = J_p \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times T_1 - r_p \times T_2$$

- L'isolement de la poulie nous permet également d'écrire que $v_{ch} = v_{cp}$

- En isolant les câbles et en négligeant leurs masses, on obtiendrait $T_1 = T_{ch}$ et $T_2 = T_{cp}$, ce qui permet de relier les résultats entre eux



Système comprenant plusieurs éléments

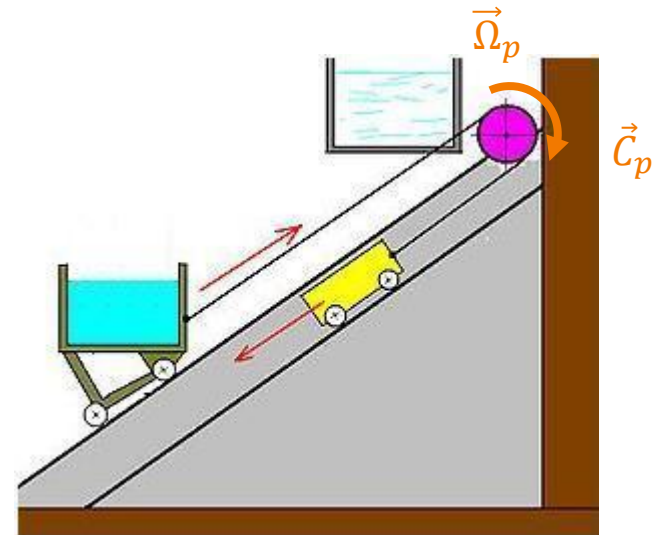
Rappel des équations précédentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet C_p = J_p \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times (T_1 - T_2) \\ \bullet T_{ch} = T_1 = m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin \alpha \\ \bullet T_{cp} = T_2 = -m_{cp} \frac{dv_{cp}}{dt} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp} \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\bullet C_p = J_p \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times (m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin \alpha + m_{cp} \frac{dv_{cp}}{dt} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ cp} - P_{cp} \sin \alpha)$$

$$\bullet \text{Or, } v_{ch} = v_{cp} \text{ et } v_{ch} = \Omega_p \times r_p$$

$$\bullet C_p = J_p \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times \left[(m_{ch} + m_{cp}) \frac{dv_{ch}}{dt} + (P_{ch} - P_{cp}) \sin \alpha + F_{fv\ ch} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ ch} + F_{roul\ cp} \right]$$



$$C_p = \underbrace{[J_p + r_p^2 (m_{ch} + m_{cp})]}_{\text{Inertie équivalente}} \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times \underbrace{[(P_{ch} - P_{cp}) \sin \alpha]}_{\text{Aide du contreponds}} + \underbrace{[F_{fv\ ch} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ ch} + F_{roul\ cp}]}_{\text{Ensemble des frottements}}$$

Transfert d'énergie mécanique

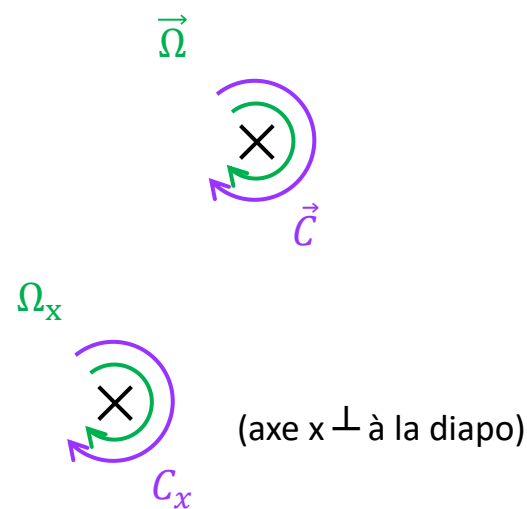
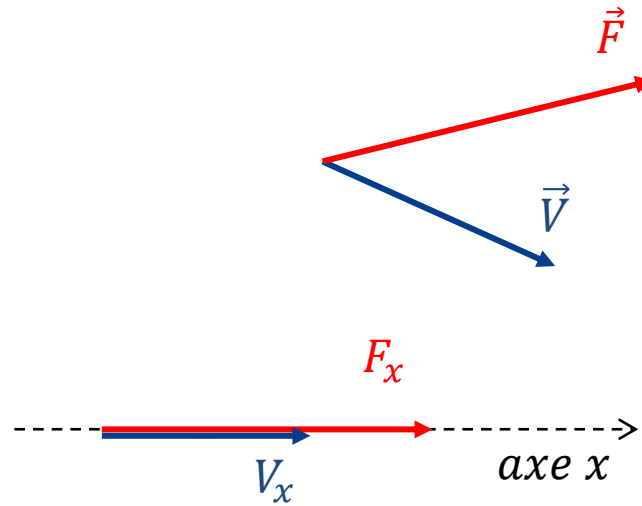
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

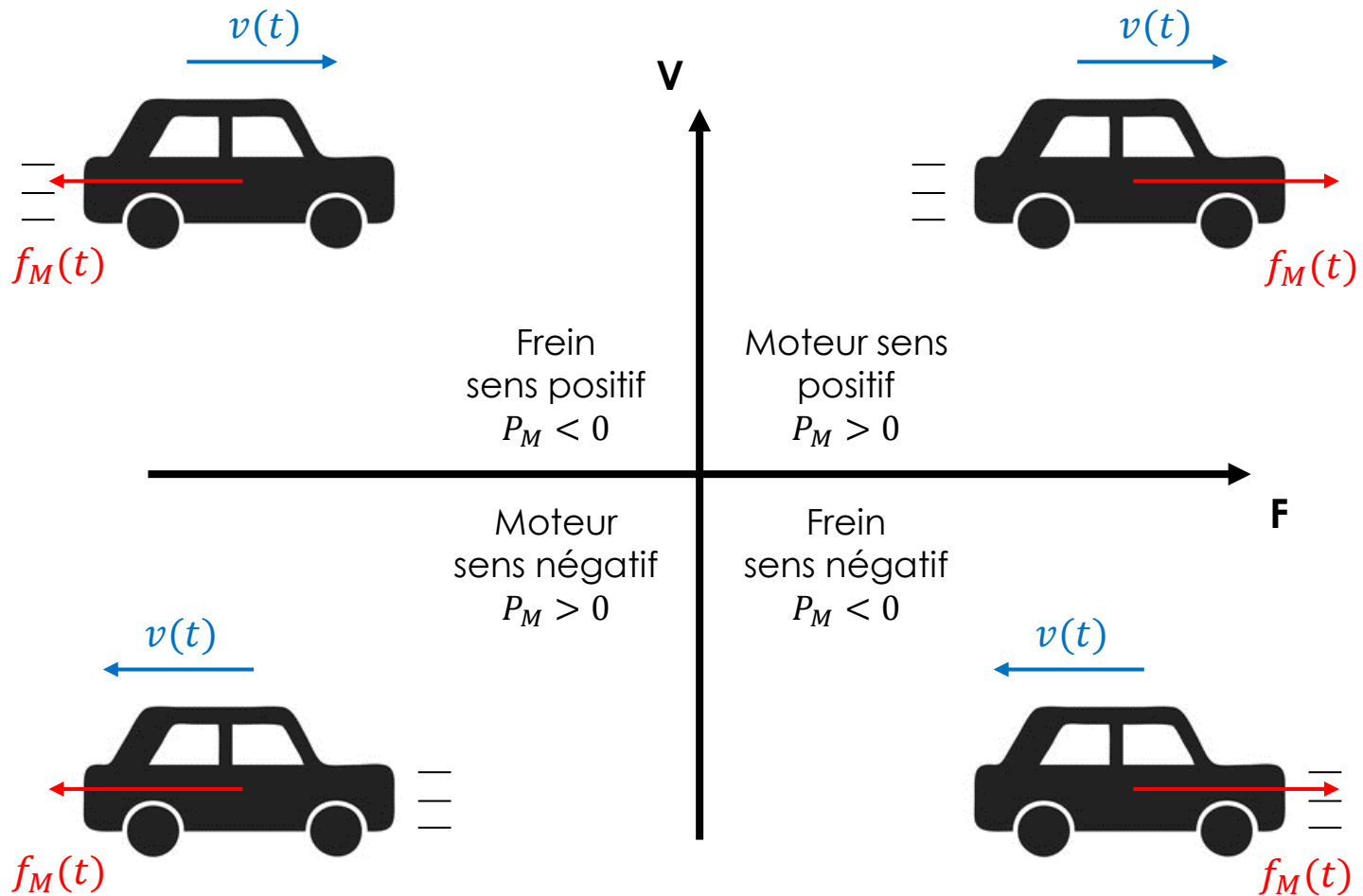
Cours SY03 : rappels de mécanique

Puissance mécanique

- Translation : $P_M = \vec{V} \cdot \vec{F}$
- Selon l'axe x : $P_{M,x} = V_x \cdot F_x$
- Rotation : $P_M = \vec{\Omega} \cdot \vec{C}$
- Selon l'axe x : $P_{M,x} = \Omega_x \cdot C_x$



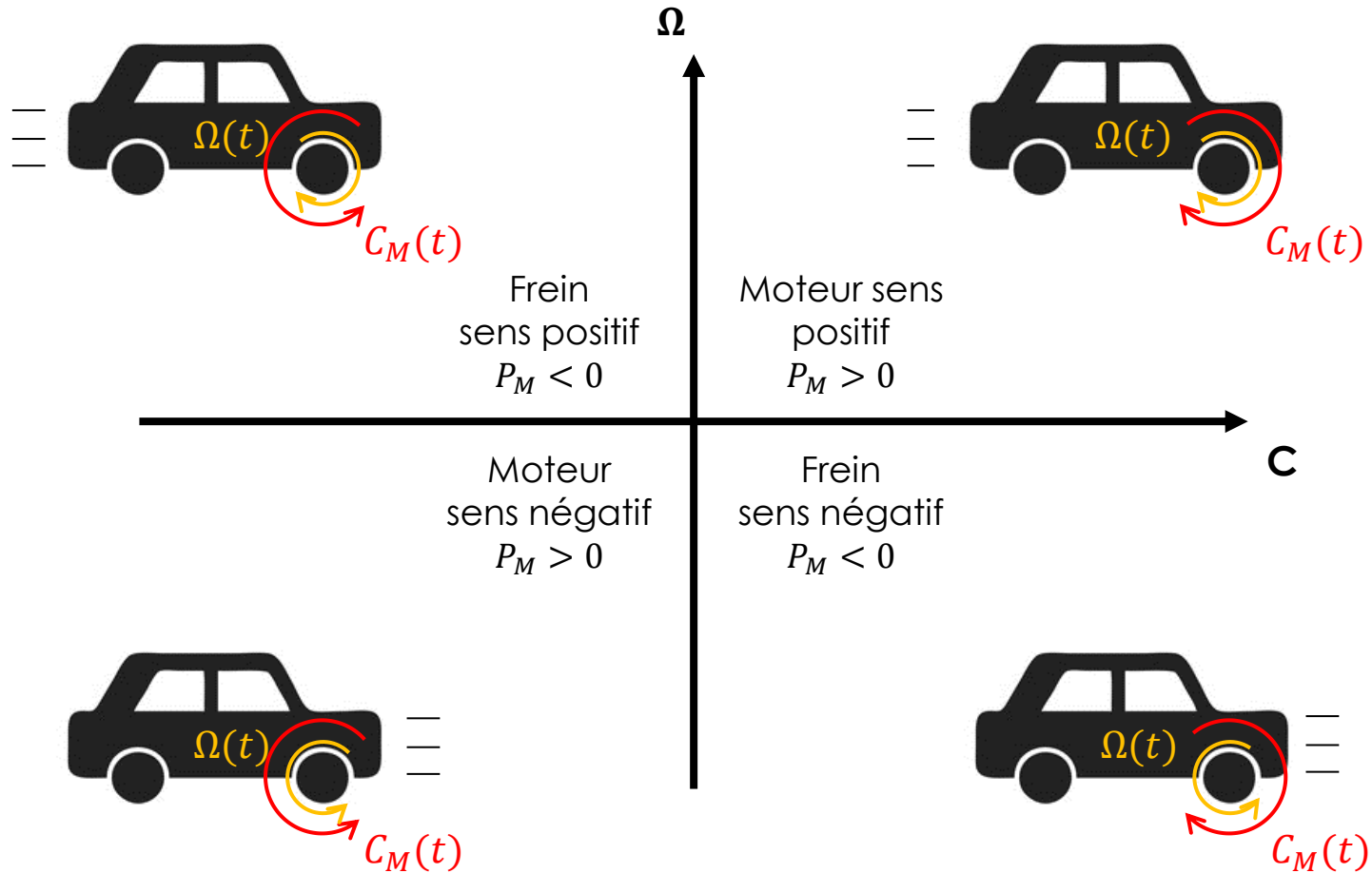
Puissance mécanique : moteur ou frein



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Puissance mécanique : moteur ou frein



Stockage d'énergie mécanique

- Eléments réversibles : peuvent absorber ou fournir de l'énergie

Energie	Augmentation de W_m	Baisse de W_m
Pesanteur $W_g = mgh$	h augmente	h diminue
Ressort $W_R = 1/2 K_R X^2$	x augmente	x diminue
Cinétique $W_c = 1/2 m V^2$	v ou $ \Omega $ augmente	v ou $ \Omega $ diminue
	⇒ frein	⇒ moteur

Dissipation d'énergie mécanique

- Eléments non réversibles : ne font qu'absorber de l'énergie mécanique
- Frottements aérodynamiques : $W = \int_0^t \vec{F}_{FV} \cdot \vec{V} \cdot dt = -\frac{1}{2} \rho \cdot SC_x \int_0^t V^3 \cdot dt$