MT09-A2023 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 15 à 20 minutes. Sans documents ni outils électroniques.
Rédiger sur l'énoncé.

NOM PRÉNOM : Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A admet une décomposition de Cholesky, alors A est symétrique définie positive.

   Réponse : cf. cours. □

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A la matrice définie par $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & \alpha \end{bmatrix}$. Faites le calcul de la décomposition de Cholesky de A. En déduire une condition suffisante sur α pour que A soit symétrique définie positive.

   Réponse : En écrivant $A = CC^T$ avec C triangulaire inférieure et $c_{ii} > 0$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}^2 & = & 9 \\ c_{21}c_{11} & = & -6 \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 & = & \alpha \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c_{11} & = & 3 \\ c_{21} & = & -2 \\ c_{22} & = & \sqrt{\alpha - 4}, \quad \textbf{ssi } \alpha > 4, \end{array}\right. \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & \sqrt{\alpha-4} \end{bmatrix}.$$

   Donc la décomposition de Cholesky de A est faisable $\Longleftrightarrow \alpha > 4$, ce qui implique que A SDP. En fait, c'est une équivalence (cf. cours). □

Exercice 2 *(barème approximatif : 1,5 points)*

On se place sur l'espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n > 1$.

1. Donner la définition d'une norme $|||\cdot|||$, subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$.

   Réponse : cf. cours. □

2. Prouver l'inégalité $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$ pour A et B dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, à partir de la définition de $|||\cdot|||$.

   Réponse : soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Il vient

$$\begin{array}{rcll} \|(AB)x\| & = & \|A(Bx)\| & \\ & \leq & |||A|||\,\|Bx\| & \textbf{(propriété de la norme matricielle subordonnée pour } A\textbf{)} \\ & \leq & |||A|||\,|||B|||\,\|x\| & \textbf{(prop. de la norme matricielle subordonnée pour } B\textbf{).} \end{array}$$

   Donc, comme $x \neq 0$,

$$\frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq |||A|||\,|||B|||,$$

le terme de droite est un majorant indépendant de x, donc le $\sup$, qui est le plus petit des majorants, existe, et reste plus petit que ce majorant. Il vient

$$|||AB||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \quad \leq \quad |||A|||\ |||B|||.$$

$\square$

3. Donner l'expression des normes $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$ et $|||\cdot|||_\infty$.

   Réponse : cf. cours :

$$|||A|||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^\top A)}, \quad |||A|||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

$\square$

Exercice 3 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit un entier $n \geq 1$. Soit C une matrice de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, et d un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $|||C||| < 1$ pour une certaine norme subordonnée à une norme vectorielle $\|\cdot\|$. On suppose qu'il existe $x^\star$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que $x^\star = Cx^\star + d$.

1. Calculer le noyau de $I - C$.

   Réponse :

$$x \in \ker(I - C) \Leftrightarrow x = Cx, \qquad \textbf{donc } \|x\| = \|Cx\| \leq |||C|||\ \|x\|,$$

   donc, si $\|x\| \neq 0$, on aurait, après simplification $1 \leq |||C|||$, ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. On vient de montrer que $\ker(I - C) = \{0\}$.

   (Au passage, ceci montre que $I - C$, carrée est inversible et donc $x^\star$ existe.)

$\square$

2. Soit la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, et

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad \forall k \geq 0.$$

   Montrer que la suite converge vers $x^\star$. (On pourra étudier la quantité $\|x^{(k)} - x^\star\|$).

   Réponse : en éliminant d dans les différences ci-dessous, on obtient

$$x^{(k)} - x^\star = C(x^{(k-1)} - x^\star) = C^2(x^{(k-2)} - x^\star) = \ldots = C^k(x^{(0)} - x^\star),$$

   d'où

$$\|x^{(k)} - x^\star\| \leq |||C^k|||\ \|x^{(0)} - x^\star\| \leq |||C|||^k\ \|x^{(0)} - x^\star\|.$$

   Comme $|||C||| < 1$, on peut passer à la limite quand k tend vers l'infini : en effet, $|||C|||^k$ tend vers 0 et donc $x^{(k)}$ tend vers $x^\star$.

$\square$

MT09-A2023 - Examen médian

Durée : 1 heure 10 min.

Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5 points.*

Exercice 1 : *(barème approximatif : 9 points)*

Soit A une matrice symétrique définie positive appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$).
On va étudier la suite des vecteurs $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n, \\ \forall k \geq 0 \left\{ \; x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|_2}. \right. \tag{1}$$

1. Soit z un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle.
   On pose $y = \dfrac{z}{\|z\|}$. Calculer $\dfrac{Ay}{\|Ay\|}$.

   Réponse : comme z est non nul, on peut diviser par $\|z\| \neq 0$. Comme A est SDP, son noyau est réduit à $\{0\}$ et donc comme y est non nul, Ay est non nul également. On peut donc diviser par $\|Ay\| \neq 0$. Il vient par linéarité de A et d'après la positive homogénéité et la positivité de la norme (vectorielle) :

   $$\frac{Ay}{\|Ay\|} = \frac{A\frac{z}{\|z\|}}{\|A\frac{z}{\|z\|}\|} = \frac{1}{|\,\|z\|\,|}Az\frac{1}{\frac{1}{|\,\|z\|\,|}\|Az\|} = \frac{1}{\|z\|}Az\frac{1}{\frac{1}{\|z\|}\|Az\|} = \frac{Az}{\|Az\|}.$$

   □

2. On rappelle qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres, qu'on nommera $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$: chaque Y_i est un vecteur propre dans $\mathbb{R}^n$ associé à une valeur propre λ_i de A.
   Donner les propriétés des Y_i pour $i = 1, \dots, n$.

   Réponse : voir le cours. Les vecteurs $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. De plus, ils sont orthonormés : pour tout $i, j = 1, \dots, n$, on a $Y_i^\top Y_j = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon). Et ce sont des vecteurs propres : pour tout $i = 1, \dots, n$, $AY_i = \lambda_i Y_i$. □

3. Montrer que toutes les valeurs propres λ_i de A, pour $i = 1, \dots, n$ sont > 0.

   Réponse : voir le cours. Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit Y_i un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre λ_i. On a $Y_i^T AY_i = Y_i^T(\lambda_i Y_i) = \lambda_i Y_i^T Y_i = \lambda_i\|Y_i\|_2^2 > 0$, car A est SDP et $Y_i \neq 0$. On en déduit que $\lambda_i > 0$. □

4. Dorénavant, on ordonne les Y_i de telle façon que $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. On notera bien qu'on a supposé $\lambda_1 > \lambda_2$. On écrit $x^{(0)} = \sum_{j=1}^n \xi_j Y_j$ et on supposera que $\xi_1 \neq 0$.

   (a) Calculer $\|x^{(0)}\|_2^2$ et montrer que $x^{(0)}$ est non nul.

   Réponse : on remarque que $x^{(0)}$ peut bien s'écrire sous la forme ci-dessus de façon unique, car les $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Par linéarité

de la transposition, il vient

$$\begin{aligned}\|x^{(0)}\|_2^2 &= \langle x^{(0)}, x^{(0)}\rangle = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j Y_j\right)^\top \left(\sum_{i=1}^n \xi_i Y_i\right)\\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_j \xi_i Y_j^\top Y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_j \xi_i \delta_{j,i}\\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \geq \xi_1^2 > 0,\end{aligned}$$

car les vecteurs Y_i sont orthonormés et $\xi_1 \neq 0$. On en déduit que $x^{(0)} \neq 0$. (On aurait pu dire directement que $x^{(0)} \neq 0$, car une de ses composantes dans la base $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est non nulle.) □

(b) Pour tout $k \geq 1$, calculer $A^k x^{(0)}$ dans la base $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$. On écrira $A^k x^{(0)}$ sous la forme $A^k x^{(0)} = \lambda_1^k w^{(k)}$, en précisant bien ce que vaut $w^{(k)}$.

Réponse : Il vient par linéarité de A, et du fait que les Y_i sont des vecteurs propres

$$\begin{aligned}A^k x^{(0)} &= \sum_{i=1}^n \xi_i A^k Y_i\\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i \lambda_i^k Y_i = \xi_1 \lambda_1^k Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \lambda_i^k Y_i\\ &= \lambda_1^k \left(\xi_1 Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i\right) = \lambda_1^k w^{(k)},\end{aligned}$$

car $\lambda_1 \neq 0$ et en posant $w^{(k)} = \xi_1 Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i$. □

(c) Montrer que $w^{(k)}$ et $A^k x^{(0)}$ sont non nuls pour tout k.

Réponse : comme la première composante de $w^{(k)}$ dans la base $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est non nulle (elle vaut ξ_1), on en déduit que $w^{(k)} \neq 0$. Et donc, comme $\lambda_1 \neq 0$, il vient aussi $A^k x^{(0)} = \lambda_1^k w^{(k)} \neq 0$. □

(d) Déduire des questions précédentes l'expression de $x^{(k)}$ en fonction de $A^k x^{(0)}$. (On pourra calculer $x^{(1)}$ et faire une récurrence.)

Réponse : on remarque que $Ax^{(0)}$ est non nul. On peut donc diviser par sa norme. On obtient

$$x^{(1)} = \frac{Ax^{(0)}}{\|Ax^{(0)}\|_2}.$$

On va montrer par récurrence que $x^{(k)} = \dfrac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|_2}$, pour tout $k \geq 1$.

C'est vrai pour $k = 1$.

On le suppose vrai pour k, et on obtient d'après (1) et le résultat de la question q1. (avec $y = x^{(k)} = \frac{z}{\|z\|_2}$, où $z = A^k x^{(0)}$) :

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|_2} = \frac{Ay}{\|Ay\|_2} = \frac{Az}{\|Az\|_2}\\ &= \frac{A(A^k x^{(0)})}{\|A(A^k x^{(0)})\|_2} = \frac{A^{k+1} x^{(0)}}{\|A^{k+1} x^{(0)}\|_2},\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.
On remarque de plus que (avec $w^{(k)} \neq 0$)

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|_2} = \frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1^k|}\frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2},$$

car $\lambda_1 > 0$. $\square$

5. Déterminer les limites de $w^{(k)}$, de $\|w^{(k)}\|_2$ et de $x^{(k)}$, quand k tend vers l'infini. Bien justifier.

Réponse : comme $w^{(k)} = \xi_1 Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i$, et que pour tout $i = 2, \ldots, n$, on a $0 < \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$, les termes $\xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i$ tendent tous vers 0. On en déduit que $\lim_{k\to\infty} w^{(k)} = \xi_1 Y_1$. Par conséquent, d'après la continuité de la norme, on obtient $\lim_{k\to\infty} \|w^{(k)}\|_2 = \|\xi_1 Y_1\|_2 = |\xi_1| \|Y_1\|_2 = |\xi_1|$, et cette limite est non nulle (car $\|Y_1\|_2 = 1$ est un vecteur de la base orthonormée et $\xi_1 \neq 0$).

Enfin, comme $x^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x^{(k)} &= \frac{\xi_1 Y_1}{|\xi_1| \|Y_1\|_2} = \frac{\xi_1}{|\xi_1|}\frac{Y_1}{\|Y_1\|_2} = \pm\frac{Y_1}{\|Y_1\|_2} \\ &= \pm Y_1,\end{aligned}$$

selon le signe de ξ_1. $\square$

6. (a) Calculer $(w^{(k)})^\top A w^{(k)}$.

Réponse : on calcule d'abord $Aw^{(k)}$. Par linéarité de A et comme les Y_i sont des vecteurs propres, il vient

$$\begin{aligned}Aw^{(k)} &= \xi_1 AY_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} AY_i = \xi_1 \lambda_1 Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}\lambda_i Y_i \\ &= \lambda_1 \left(\xi_1 Y_1 + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}} Y_i\right) = \lambda_1\, w^{(k+1)},\end{aligned}$$

car $\lambda_1 \neq 0$.
On obtient

$$\begin{aligned}(w^{(k)})^\top A w^{(k)} &= \lambda_1 \left(\xi_1 Y_1^\top + \sum_{i=2}^n \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i^\top\right)\left(\xi_1 Y_1 + \sum_{j=2}^n \xi_j \frac{\lambda_j^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}} Y_j\right) \\ &= \lambda_1 \left(\xi_1^2 Y_1^\top Y_1 + \sum_{j=2}^n \xi_1 \xi_j \frac{\lambda_j^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}} Y_1^\top Y_j + \sum_{i=2}^n \xi_1 \xi_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} Y_i^\top Y_1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \xi_i \xi_j \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k}\frac{\lambda_j^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}} Y_i^\top Y_j\right) \\ &= \lambda_1 \left(\xi_1^2 + \sum_{j=2}^n \xi_j^2 \frac{\lambda_j^{2k+1}}{\lambda_1^{2k+1}}\right),\end{aligned}$$

car $Y_1^\top Y_j = Y_j^\top Y_1 = 0$ si $j \geq 2$, $Y_1^\top Y_1 = 1$, et $Y_i^\top Y_j = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 2, \ldots, n$. $\square$

(b) En déduire la limite de $(x^{(k)})^\top Ax^{(k)}$, quand k tend vers l'infini.

Réponse : comme pour tout $j = 2, \ldots, n$, on a $0 < \frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1$, les termes en $\xi_j^2 \frac{\lambda_j^{2k+1}}{\lambda_1^{2k+1}}$ tendent vers 0 et on obtient

$$\lim_{k\to\infty} (w^{(k)})^\top Aw^{(k)} = \lambda_1\, \xi_1^2.$$

Comme $x^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$, et que $\lim_{k\to\infty} \|w^{(k)}\|_2 = |\,\xi_1\,| (\neq 0)$, il vient

$$\lim_{k\to\infty} (x^{(k)})^\top Ax^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(w^{(k)})^\top Aw^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2^2} = \lambda_1 \frac{\xi_1^2}{|\,\xi_1\,|^2} = \lambda_1.$$

□

(c) Conclure : que permet de calculer la méthode (1)?

Réponse : Cette méthode permet de calculer la plus grande valeur propre d'une matrice (SDP ici, mais on peut généraliser en faisant quelques modifications), et un vecteur propre associé (dans ce cas, il est de norme euclidienne=1) :

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \pm Y_1, \qquad \textbf{et} \lim_{k\to\infty} (x^{(k)})^\top Ax^{(k)} = \lambda_1.$$

Une condition pour que la méthode s'applique est que la plus grande valeur propre soit séparée des autres ($|\,\lambda_1\,| > |\,\lambda_j\,|$ pour $j \geq 2$). De plus, il faut que ξ_1 soit non nul, mais cette condition est peu restrictive en pratique (cf. erreurs flottantes).

Cette méthode s'appelle la *méthode des puissances itérées*. □

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* points

Il est indispensable de prouver les réponses.

Soit A une matrice $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$). On suppose que A^T (la **transposée** de A) est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$|\,a_{kk}\,| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |\,a_{ik}\,|.$$

1. Montrer que le noyau de A^T est réduit à $\{0\}$.

Réponse : Cet exercice est très similaire à l'exercice 5 de TD du chap 2. Attention toutefois aux différences !

Soit $x \in \ker A^\top$, et soit k tel que $\|x\|_\infty = |\,x_k\,| \geq |\,x_j\,|$, pour tout $j = 1, \ldots, n$.

On considère la composante k de l'équation $A^\top x0 =$:

$$(A^\top x)_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} (a_{kj})^\top x_j + (a_{kk})^\top x_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{jk} x_j + a_{kk} x_k = 0,$$

d'où $a_{kk} x_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{jk} x_j$. On en déduit les majorations, en utilisant l'inégalité triangulaire et la définition du x_k,

$$|\,a_{kk}\,||\,x_k\,| = |\,a_{kk} x_k\,| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |\,a_{jk}\,||\,x_j\,| \leq \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |\,a_{jk}\,| \right) |\,x_k\,|,$$

c'est-à-dire que

$$\left(|\, a_{kk}\,| - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |\, a_{jk}\,|\right) |\, x_k\,| \leq 0.$$

Comme le premier terme est > 0**, que le second est** ≥ 0**, nécessairement** $|\, x_k\,| = 0$**, et donc** $\|x\|_\infty = 0$ **et** $x = 0$**.**

On en déduit que $\ker A^\top = \{0\}$**.** □

2. La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

   Réponse : comme $A^\top$**, carrée, est injective, d'après le théorème du rang, elle est aussi surjective et bijective (car** $n = \dim\ker A^\top + \mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(A^\top)$**). Donc** $0 \neq \det(A^\top) = \det(A)$**, et** A **est également inversible.** □

3. Conclure sur la faisabilité de la factorisation $A = LU$ sans permutation. Bien justifier.

   Réponse : Soit A **telle que** $A^\top$ **est à diagonale strictement dominante. Alors chaque sous-matrice principale de** A**, notée** $[A]_l$ **pour** $l = 1, \ldots, n$**, est également telle que sa transposée** $([A]_l)^\top$ **est à diagonale strictement dominante. En effet :**

$$\forall k = 1, \ldots, l, \quad |\, a_{kk}\,| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |\, a_{ik}\,| \geq \sum_{i=1, i\neq k}^{l} |\, a_{ik}\,|.$$

   D'après la question 2., cela implique que $[A]_l$ **pour** $l = 1, \ldots, n$**, est inversible. Et, d'après le cours, c'est équivalent au fait que la factorisation** $A = LU$ **est faisable sans permutation (avec** U **inversible).** □

Exercice 3 : *(barème approximatif : 3 points)*

Soit T une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{2n,2n}(\mathbb{R})$ et H un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ ($n \geq 1$). On cherche V, vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $TV = H$.

On décompose T, H et V en blocs de la façon suivante :

$$T = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & M \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix},$$

où $M, N \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, 0 matrice nulle $\in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, E, F, X, Y vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$.

On démontre, et nous l'admettrons, que

$$TV = H \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} MX + NY = E \\ MY = F \end{array} \right. . \tag{2}$$

On suppose que l'on dispose des fonctions Scilab suivantes :

- `function [L, U] = LU(A)`

  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule sa factorisation LU : $A = LU$.

- `function [x] = resolLU(A, b)`

  Étant donnés la matrice A et le vecteur b, cette fonction calcule la factorisation LU de A puis résout $Ax = b$.

- `function [B] = inverse(A)`

  Étant donnée la matrice A, cette fonction calcule l'inverse $B = A^{-1}$ de A.

- `function [x] = solinf (L,b)`

  Étant donnés la matrice triangulaire inférieure L et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Lx = b$.

- `function [x] = solsup (U,b)`

  Étant donnés la matrice triangulaire supérieure U et le vecteur colonne b, cette fonction résout $Ux = b$.

1. Écrire une fonction Scilab

   - `function [V] = resol(M, N, H)` qui étant donnés les matrices M et N et le vecteur H, calcule le vecteur V tel que $TV = H$, en utilisant la relation (2).

   On sera attentif à faire le moins d'opérations possibles.

   Réponse : il ne faut surtout pas utiliser la fonction `inverse` ! Et il faut éviter de factoriser plusieurs fois la matrice M, car c'est l'opération la plus coûteuse : la fonction `resolLU` est également à proscrire !

   Voici une implémentation possible : □

```
function [V] = resol(M, N, H)
// resout : (M N; 0 M) V = H
exec("solsup.sci", -1); exec("solinf.sci", -1); exec("LU.sci", -1);
n = size(M,1);
[L, U] = LU(M); // factorisation
z = zeros(n, 1);
E = H(1:n); F = H(n+1:2*n); // extrait les 2 blocs de H
z = solinf(L, F); y = solsup(U, z);
v = E - N*y; // calcul du second membre pour x
z = solinf(L, v); x = solsup(U, z);
V = [x; y];
endfunction
```

2. Donner le nombre de multiplications nécessaires pour la résolution de ce système en utilisant votre fonction `resol`.

   Quel serait le nombre de multiplications nécessaires pour résoudre directement $TV = H$? Expliquer.

   On demande le coût asymptotique, quand n tend vers l'infini.

   Réponse : d'après le cours, pour une matrice de taille n, le coût de `solinf` et `solsup` est de $n^2/2$ multiplications. Le coût de la factorisation LU est de $n^3/3$ multiplications. Le coût du produit matrice vecteur Ny est de n^2 multiplications. Il y a 1 `LU`, 2 `solsup`, 2 `solinf` et un produit Ny, donc le coût de la fonction `resol` ci-dessus est de $n^3/3 + 3n^2 \approx n^3/3$ multiplications (les termes en n^2 sont négligeables devant $n^3/3$), donc essentiellement le coût de la factorisation de M.

   S'il avait fallu factoriser T directement qui est de taille $2n$, le coût aurait été de $(2n)^3/3 = 8n^3/3$ multiplications, soit 8 fois plus cher... □