

## Chapitre 3 - Exos hors liste

### Hors Liste

**Exercice 1.** Un système est composé de trois composants indépendants. Le temps de bon fonctionnement de chaque composant suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Le système fonctionne normalement tant que deux composants au moins sont en état de marche. On note  $T$  la variable aléatoire égale au temps pendant lequel le système fonctionne et on note  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  le temps de bon fonctionnement de chaque composant.

1. Ecrire l'événement  $\{T \leq t\}$  comme la réunion de quatre événements deux à deux incompatibles, faisant intervenir  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .
2. Déterminer la fonction de répartition de  $T$ .
3. Montrer que la fonction de répartition  $F$  de la variable aléatoire  $T$  est dérivable en 0. En déduire sa densité  $f$ .

**Exercice 2.** On considère la variable aléatoire  $X$  de loi uniforme sur  $] - 1, 1[$ .

1. Donner la densité de  $X$ .
2. Déterminer la probabilité  $P(|X| > \frac{1}{2})$ .
3. Posons  $Y = |X|$ , donner la fonction de répartition de  $Y$ .
4. Donner la densité de  $Y$ .
5. Soit  $Z = 1_{]0,1[}(X) - 1_{]-1,0[}(X)$ . Déterminer la loi de  $Z$ .

**Exercice 3.** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes de loi commune  $\varepsilon(\lambda)$ .

1. Donner la loi de  $X + Y$  en utilisant le produit de convolution.
2. Si  $Z$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$  et soit  $m \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Montrer que  $P(Z < 2) = P(X + Y > t)$ .
  - (b) Déterminer la fonction génératrice des moments de  $Z$ .
3. Soit la variable aléatoire  $U = e^Y$ 
  - (a) Déterminer la densité de la variable aléatoire  $U$ .
  - (b) Déterminer  $E[U]$ .
  - (c) Evaluer  $E[U^k]$ ,  $k \geq 2$ .

**Exercice 4.** La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée est une v.a. de densité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ a(6 - x) & \text{si } 3 \leq x < 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer  $a$ .

2. Déterminer la fonction de répartition  $F$  associée à  $f$ .
3. Quelle est la probabilité, qu'en une journée, soit vendu
  - (a) plus de 300 kilos de pain.
  - (b) entre 150 et 450 kilos de pain.
4. Soit  $A$  l'événement défini par 3(a) et  $B$  celui défini par 3(b), les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?