# MT09 : Chapitre 7
# Résolution numérique
# des équations différentielles

MT09
Vincent.Martin@utc.fr

UTC
Compiègne, France

UTC, A2023

# Plan

# Plan

# Équations différentielles : le problème

Pour un entier $p \geq 1$, soient :

- $t_0$ et $T > 0$ sont des réels donnés,
- $a$ dans $\mathbb{R}^p$,
- $f$ une fonction connue régulière : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$.

Problème continu : trouver une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ telle que

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = a. \end{array} \right.$$

# Équations différentielles : le problème

Pour un entier $p \geq 1$, soient :

- $t_0$ et $T > 0$ sont des réels donnés,
- $a$ dans $\mathbb{R}^p$,
- $f$ une fonction connue régulière : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$.

Problème continu : trouver une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ telle que

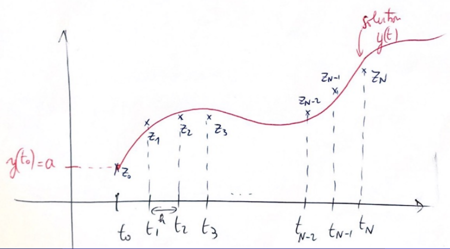
$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = a. & \end{array} \right.$$

Discrétisation en $N > 0$ intervalles

- un pas $h = \dfrac{T}{N} > 0$,
- $t_n = t_0 + nh$, pour $n = 0, ..., N$, régulièrement espacés,

Problème discret : pour $n = 0, ..., N$, trouver des vecteurs $z_n \in \mathbb{R}^p$ qui approchent $y(t_n)$.
Schéma numérique :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{n+1} = z_n + h\phi(t_n, z_n, h) \\ \qquad\qquad \forall n = 0, \ldots, N-1, \\ z_0 = a. \end{array} \right.$$



# Hypothèses pour tout le cours

On suppose que les fonctions sont suffisamment régulières.

On suppose que les conditions du théorème de Cauchy–Lispchitz s'appliquent.

# Plan

# Mise sous forme normale : principe

Permet de passer d'une équation différentielle d'ordre $p$ scalaire :
on cherche $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$\left\{\begin{array}{l} y^{(p)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t)), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \ldots \\ y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}, \end{array}\right.$$

où $g : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,
et $y_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, \ldots, p - 1$,

# Mise sous forme normale : principe

Permet de passer d'une équation différentielle d'ordre $p$ scalaire :
on cherche $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} y^{(p)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}, \end{cases}$$

où $g : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,
et $y_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0, \dots, p-1$,

à un système différentiel d'ordre 1 vectoriel de taille $p$ : on cherche $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ tq :

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)), \\ U(t_0) = U_0, \end{cases}$$

où $F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ et $U_0$ dépendent de $g$ et des conditions initiales $y_i$.

# Mise sous forme normale : calcul

Poser

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_{p-1}(t) \\ U_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(p-2)}(t) \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix},$$

On dérive

$$\begin{aligned} U'(t) &= \begin{pmatrix} U'_1(t) \\ U'_2(t) \\ \dots \\ U'_{p-1}(t) \\ U'_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ y^{(p)}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \\ \dots \\ U_p(t) \\ g(t, U_1(t), \dots, U_p(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La fonction $F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ s'exprime alors

$$F(\theta, Y) = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_p \\ g(\theta, Y_1, \dots, Y_p) \end{bmatrix}.$$

# Mise sous forme normale : calcul

Poser

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_{p-1}(t) \\ U_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(p-2)}(t) \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix},$$

On dérive

$$U'(t) = \begin{pmatrix} U_1'(t) \\ U_2'(t) \\ \dots \\ U_{p-1}'(t) \\ U_p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ y^{(p)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \\ \dots \\ U_p(t) \\ g(t, U_1(t), \dots, U_p(t)) \end{pmatrix}.$$

La fonction $F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ s'exprime alors

$$F(\theta, Y) = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_p \\ g(\theta, Y_1, \dots, Y_p) \end{bmatrix}.$$

Attention : ne pas confondre les variables muettes des fonctions (ici $\theta$ et $Y$), les fonctions (ici $U$) et les valeurs des fonctions en un point (ici $U(t)$ dans $\mathbb{R}^p$).

# Mise sous forme normale : calcul

Poser

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_{p-1}(t) \\ U_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \dots \\ y^{(p-2)}(t) \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix},$$

On dérive

$$U'(t) = \begin{pmatrix} U_1'(t) \\ U_2'(t) \\ \dots \\ U_{p-1}'(t) \\ U_p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(p-1)}(t) \\ y^{(p)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \\ \dots \\ U_p(t) \\ g(t, U_1(t), \dots, U_p(t)) \end{pmatrix}.$$

La fonction $F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ s'exprime alors

$$F(\theta, Y) = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_p \\ g(\theta, Y_1, \dots, Y_p) \end{bmatrix}.$$

Attention : ne pas confondre les variables muettes des fonctions (ici $\theta$ et $Y$), les fonctions (ici $U$) et les valeurs des fonctions en un point (ici $U(t)$ dans $\mathbb{R}^p$).

Conditions initiales à écrire également.

# Plan

# Quelques schémas : principe

On chercher $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($p = 1$) tq :

$$(E) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = a. \end{cases}$$

Théorème fondamental d'analyse ($y$ est au moins de classe $C^1$) :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

Cette équation sur la fonction inconnue $y$ permet de trouver des schémas liant $z_{n+1}$ à $z_n$, en approchant l'intégrale en fonction de valeurs de $y(t_i)$.

(Cf. chap 6, intégration numérique)

# Quelques schémas : exemples

- Rectangles à gauche
  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx hf(t_n, y(t_n))$
  Schéma d'Euler explicite

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n)$$

- Rectangles à droite
  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$
  Schéma d'Euler implicite (ou rétrograde)

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1})$$

- Trapèzes $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx$
  $h/2\big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\big)$
  Schéma de Cranck–Nicholson

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})\big)$$

(implicite)

# Quelques schémas : exemples

- Rectangles à gauche
  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx hf(t_n, y(t_n))$
  Schéma d'Euler explicite

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n)$$

- Rectangles à droite
  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$
  Schéma d'Euler implicite (ou rétrograde)

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, z_{n+1})$$

- Trapèzes $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx h/2(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$
  Schéma de Cranck–Nicholson

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1}))$$

(implicite)

- Trapèzes (bis) : prédicteur / correcteur
  Schéma de Euler–Cauchy (ou Heun)

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})) \end{cases}$$

(explicite)

- Rectangles au milieu $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\mathrm{d}t \approx hf(t_n + h/2, y(t_n + h/2))$
  Prédiction / correction
  Schéma du point milieu

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1/2} = z_n + \dfrac{h}{2}f(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n + \dfrac{h}{2}, \tilde{z}_{n+1/2}) \end{cases}$$

(explicite)

# Quelques schémas : exemples

- Theta-méthode

$$z_{n+1} = z_n + h\big((1-\theta)f(t_n, z_n) + \theta f(t_{n+1}, z_{n+1})\big)$$

(implicite si $\theta \neq 0$)

Généralisation d'Euler explicite ($\theta = 0$),
d'Euler implicite ($\theta = 1$),
et de Cranck–Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$).

# Plan

# Plan

# Plan

# Plan

# Plan