MT94/P24/TD - Équations différentielles et schémas numériques

1 Bille mobile dans un champ de force 2D

On considère une bille mobile en position $M(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ au temps t. Sa vitesse est notée $V(t) = (v_x(t), v_y(t)) \in \mathbb{R}^2$. La bille de masse m est sujette à une énergie potentielle notée $\phi(M)$, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les lois de la cinématique et de la dynamique donnent les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = V(t), \\ m\dfrac{dV(t)}{dt} = -\nabla\phi(M(t)). \end{cases} \tag{1}$$

L'énergie totale E_T de la bille est la somme de son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\|V\|^2$ et de son énergie potentielle $\phi(M)$, i.e.

$$E_T = E_T(M, V) = \frac{1}{2}m\|V\|^2 + \phi(M).$$

À partir des équations du mouvement, vérifiez que l'énergie totale de la bille est conservée au cours du temps :

$$\frac{dE_T(t)}{dt} = 0.$$

Réécrire le système (1) sous la forme générique

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}).$$

NB - On fera bien attention à la dimension de `z` et `zdot`. Le vecteur d'état ici est $\boldsymbol{z} = (x, y, v_x, v_y) \in \mathbb{R}^4$ (couple position-vitesse).

Dans ce TP, on va tester différents schémas numériques d'intégration temporelle de ce système dynamique et observer le comportement de l'énergie totale.

1.1 Schéma d'Euler explicite

Écrire une fonction

```
[td, z] = EulerExpl(t0, z0, f, T, N)
```

qui implémente le schéma d'Euler explicite pour un système d'EDO de la forme

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}(t))$$

partant de la donnée initiale $\boldsymbol{z}^0$ au temps t_0, jusqu'au temps final T, avec N valeurs de temps discrets. Le pas de temps h sera constant de valeur $h = (T - t^0)/N$. La fonction retourne le tableau des temps discrets `td` ainsi que le tableau de la solution approchée de $\boldsymbol{z}$ aux différents instants discrets $t^n = t^0 + nh$. Remarquez que $T_N = t^0 + Nh = T$.

1.2 Application

Pour l'application numérique, on choisit

$$\phi(M) = \phi(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + y^4}$$

Calculez d'abord sur brouillon $\nabla\phi(x, y)$. Écrire ensuite une fonction

```
zdot = fbille(t, z)
```

qui représente la fonction du système de la bille pour l'état $\boldsymbol{z}$ et au temps t. Pour la masse m de la bille, on prendra simplement $m = 1$.

Appliquez le schéma d'Euler explicite au système bille. On utilisera la position initiale de bille et vitesse initiale :

$$M^0 = (2, 1), \quad V^0 = (1, -1).$$

On utilisera $t_0 = 0$ pour le temps initial, $T = 40$ pour le temps final, et $N = 10000$ pour le nombre de points de discrétisation.

1.3 Différentes visualisations

Dans une première fenêtre graphique, tracer la position de la bille vue comme une courbe **paramétrée** en fonction du temps, i.e.

$$t \mapsto (x(t),\ y(t)), \quad t \in [0, T].$$

Dans une deuxième fenêtre, tracer avec des `subplot()` les séries temporelles suivantes :

$$t \mapsto x(t), \quad t \mapsto y(t), \quad t \mapsto v_x(t), \quad t \mapsto v_y(t).$$

1.4 Évolution de l'énergie

Dans un tableau Scilab, stockez l'énergie totale discrète $E_T(t^n)$ résultante à chaque temps discret t^n et dans un graphique tracez l'énergie totale au cours du temps. Que constatez-vous ? Décevant non ?

1.5 Analyse

Pour toute fonction convexe dérivable $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on a la propriété

$$\psi(y) \geq \psi(x) + \nabla\psi(x) \cdot (y - x)$$

(s'en convaincre en 1D sur un graphique).

Il est facile de montrer que la fonction de potentiel ϕ de la section 1.2 est convexe, et même strictement, si bien que

$$\psi(y) > \psi(x) + \nabla\psi(x) \cdot (y - x) \qquad \text{pour } y \neq x.$$

Pour le système de la bille, le schéma d'Euler explicite sous forme développée s'écrit

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n + hV^n, \\ V^{n+1} &= V^n - \frac{h}{m}\,\nabla\phi(M^n). \end{aligned}$$

Montrez alors que, pour temps discret t^n, quel que soit $h > 0$,

$$E_T^{n+1} > E_T^n.$$

Le schéma d'Euler explicite *produit ainsi de l'énergie* de manière artificielle. D'un point de vue théorique, on pourrait affiner l'analyse pour mesurer plus précisément le taux de production parasite d'énergie en fonction de h.

1.6 Schéma d'Euler implicite

Pour le système de la bille, le schéma d'Euler implicite sous forme développée s'écrit

$$M^{n+1} = M^n + h\,V^{n+1},$$
$$V^{n+1} = V^n - \frac{h}{m}\,\nabla\phi(M^{n+1}).$$

Sa résolution nécessite un algorithme de point fixe (par exemple Newton) pour déterminer (M^{n+1}, V^{n+1}) en fonction de (M^n, V^n). Par des arguments similaires à la question précédente, démontrez théoriquement que dans ce cas, pour temps discret t^n, quel que soit $h > 0$,

$$E_T^{n+1} < E_T^n.$$

Autrement dit, le schéma d'Euler implicite absorbe artificiellement de l'énergie, on dit qu'il est dissipatif. Ce n'est pas beaucoup mieux, mais au moins on ne risque pas d'"exploser".

On ne mettra pas en œuvre le schéma d'Euler implicite en raison de sa difficulté technique.

1.7 Schéma d'Euler-Cauchy

Écrire une fonction

```
[td, z] = EulerCauchy(t0, z0, f, T, N)
```

qui implémente le schéma d'Euler-Cauchy pour un système d'EDO de la forme

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}(t))$$

partant de la donnée initiale $\boldsymbol{z}^0$ au temps t^0, jusqu'au temps final T, avec N valeurs de temps discrets. Le pas de temps h sera constant de valeur $h = (T - t_0)/N$.

Appliquez le schéma d'Euler-Cauchy au système de la bille comme indiqué dans les questions précédentes. Stockez l'énergie totale discrète $E_T(t^n)$ résultante à chaque temps discret t^n et dans un graphique tracez l'énergie totale au cours du temps. Est-ce plus satisfaisant ?

1.8 Schéma à variables décalées (méthode de Verlet)

Il existe aussi des schémas numériques où les variables de position et de vitesses sont décalées dans le temps : les positions M^n sont estimées aux temps discrets $t^n = t_0 + nh$, tandis que les vitesses $V^{n+1/2}$ sont évaluées aux instants discrets $t^{n+1/2} = t_0 + (n+1/2)h$ (il y a des raisons physiques à faire cela).

Partant des données initiales de positions M^0 et de vitesse V^0, il y a une difficulté puisque l'on ne connaît pas de vitesse initiale $V^{1/2}$ au temps $t^{1/2}$. En général, on applique un schéma d'ordre 2, tel que le schéma d'Euler-Cauchy sur un pas de temps $h/2$ pour obtenir une estimation à l'ordre 2 de $V(t^{1/2})$. Une fois $V^{1/2}$ calculée, on peut appliquer le schéma itératif suivant, appelé schéma de Verlet : pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} M^{n+1} = M^n + h\,V^{n+1/2}, \\ V^{n+3/2} = V^{n+1/2} - \dfrac{h}{m}\nabla\phi(M^{n+1}). \end{cases}$$

Écrire une fonction

```
[td, tdhalf, M, V] = Verlet(t0, M0, V0, phi, T, N)
```

qui met en œuvre le schéma de Verlet, avec la position initiale `M0`, la vitesse initiale `V0`, le potentiel `phi`, et en sortie le tableau `td` stockant les temps discrets t^n, le tableau `tdhalf` stockant les temps discrets $t^{n+1/2}$, et `M` et `V` les tableaux des positions et vitesses discrètes.

Comme les variables positions-vitesses sont décalées, il y a aussi une difficulté pour définir une énergie de façon unique. On considèrera l'énergie discrète

$$E_T^n = \phi(M^n) + \frac{1}{2} m \left\| \frac{V^{n-1/2} + V^{n+1/2}}{2} \right\|^2 \quad , n \geq 1.$$

Tracez l'énergie totale ainsi définie au cours du temps.

2 Ensemble atteignable pour un robot élémentaire

2.1 Préparation

Éxécutez le script Scilab suivant. Que fait ce code ?

```
function code = dec2baseArray(N, Size, base)
        code = zeros(1,Size);
        Nc = N;
        i = 0;
        for k = Size-1 : -1 : 0
                i = i+1
                p = int(Nc/(base^k))
                code(i) = p;
                Nc = Nc - p*(base^k);
        end // for k
endfunction

Size = 8;
code = dec2baseArray(6001, Size, 3)
disp(code)
// Comparaison
disp(dec2base(6001, 3)) // Macro Scilab
```

2.2 Robot mobile à trois modes de mouvement

Un robot mobile au sol a la possibilité de se déplacer avec `nmodes=3` modes de déplacement : virage à gauche (mode 0), tout droit (mode 1) ou virage à droite (mode 2).

Pour les besoins du TP, on suppose que, partant de l'origine $(0,0)$ avec une vitesse initiale $(0.1, 0)$, le robot peut commuter son mode de déplacement 7 fois seulement, soit 8 modes au total sur son trajet. Chaque commutation a lieu à temps fixe, toutes les 10 secondes (`DT=10`). Sa séquence de modes de commutation peut être représentée par un vecteur `code` de taille `Size=8` (par exemple `code=[2 2 0 2 0 1 2 1]`).

Les équations du mouvement sont données par l'équation de la cinématique

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{V},$$

et les équations de la dynamique. Ces dernières sont dépendantes du mode de déplacement courant :

- Si `mode=0` (virage gauche), alors

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = c\, A\vec{V}$$

  où $c = 0.1$ et A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si `mode=1` (tout droit), alors $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}$.
- Si `mode=2` (virage à droite), alors

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -c\,A\vec{V}.$$

1. Codez la fonction F du système dynamique résultant

$$\dot{X} = F(t, X; \mathrm{mode})$$

   où $X(t) = (\vec{M}, \vec{V}) \in \mathbb{R}^4$ selon le modèle :

```
function Xdot = F(t, X, currentmode)
        // currentmode=0 : virage gauche
        // currentmode=1 : tout droit
        // currentmode=2 : virage droite
        M = X(1:2)
        V = X(3:4)
        c = 0.1;
        // A COMPLETER ...
```

2. Avec l'aide de la macro `ode()`, calculez puis tracez la trajectoire du robot pour la séquence de modes `code=[2 2 0 2 1 1 2 1]`. Vérifiez visuellement que la trajectoire est cohérente avec la séquence de modes choisie.

   NB : Pour le tableau des temps discrets, on prendra

```
td = 0.5 : 0.5 : DT;
```

3. Tracer enfin toutes les trajectoires possibles pour le robot (il y en a $3^8 = 6561$). Celles-ci forment l'ensemble des positions atteignables par le robot.

4. Influence de c : retracez l'ensemble atteignable pour les valeurs différentes de c suivantes : $c = 0.2$ et $c = 0.05$.

ps : évidemment, l'autre question scientifique intéressante est de déterminer le mode optimal permettant de s'approcher au plus près d'une position "objectif", mais cela va au delà du cours. Il faudra patienter encore un peu !