CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ PAR MORCEAUX

ANTOINE ZUREK

Table des matières

1. Continuité et continuité par morceaux

Dans la suite je considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, i.e., on a

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ on appelle limite à droite en x_0 de f la quantité

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

De même on appelle limite à gauche en x_0 de f la quantité

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Si ces limites existent on note

$$f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Exemple 1.
- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la limite à droite et à gauche de f en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ est égale à 1.*
- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

  La limite à droite de f en 0 vaut 1 et la limite à gauche de f en 0 vaut -1
- *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1, \\ x - 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Date: 15 avril 2024.

On a

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1,$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1) = 0.$$

Par le biais de la définition de limite à droite et à gauche d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on en déduit que f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x).$$

Si ces limites sont égales on a

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x).$$

Ainsi la première fonction de l'Exemple 1 est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Par contre la deuxième fonction n'est pas continue en 0, elle est par contre continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Idem la troisième fonction de l'Exemple 1 n'est pas continue en 1 car

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x).$$

Par contre elle est continue sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. On arrive ainsi la notion (plus faible que celle de continuité) de continuité par morceaux :

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, si à chaque fois que f est restreinte à un intervalle non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ il existe une suite finie de points $(x_i)_{1\leq i\leq m}$ de $[a, b]$ vérifiant*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b,$$

tel que la restriction de f à chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ ($2 \leq i \leq m$) se prolonge en une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$.

Si on considère la première fonction de l'Exemple 1 alors f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$. Pour la deuxième fonction, si on restreint f à tout intervalle évitant le point 0 alors la fonction est continue sur cet intervalle. Par contre, si on considère par exemple f restreinte à l'intervalle $[-1, 1]$ alors on définit la suite de trois points $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$. Dans ce cas la fonction f restreinte à $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ est continue et est prolongeable par continuité sur les intervalles fermés $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$. En effet, on a les limites suivantes

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} -1 = -1,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\ x<x_2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1 = -1,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\x>x_2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1 = 1,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_3\\x>x_3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} 1 = 1.$$

Ainsi cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On raisonne de la même manière pour la troisième fonction (la discontinuité est située dans ce cas en 1). Donnons à présent l'exemple d'une fonction qui n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

Exemple 2. *Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ 0 & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

Ici f n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, la restriction de f à chaque intervalle évitant 0 est continue par contre si (par exemple) on restreint f à l'intervalle $[-2,1]$ et que l'on définit la suite finie de trois points $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$ alors f est continue sur $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ par contre f est continue sur $[x_1, x_2]$ mais pas $[x_2, x_3]$. En effet, on a

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\x>x_2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Ainsi f n'admet pas de prolongement continu sur $[0,1]$. Donc f n'est pas continue par morceaux.

On peut ainsi retenir qu'une fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si à chaque point x_0 où la fonction est discontinue les quantités $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent.

2. Dérivabilité et dérivabilité par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose f continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe. Si cette limite existe on la note $f'(x_0)$. Si f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ on dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons à présent une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}$ (ce qui explique la présence de $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ dans la suite). Comme dans le cas de la continuité, on définit les tangentes à droite et à gauche de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ via

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0},$$

et

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

Bien entendu si f est continue en x^0 on peut remplacer $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ par $f(x_0)$. Dans tous les cas, si ces limites existent on note

$$f'(x_0^+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0},$$

et

$$f'(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}.$$

Si f est dérivable en x_0 on a bien entendu

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-).$$

Si f admet un (ou plusieurs) point x_0 où $f'(x_0^+)$ et $f'(x_0^-)$ existent mais $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ on arrive alors à la notion de dérivabilité par morceaux.

Définition 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$, si à chaque fois que f est restreinte à un intervalle non vide $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ il existe un nombre fini de points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ vérifiant*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b,$$

tel que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leq i \leq m - 1)$ se prolonge en une fonction dérivable sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Si on reprend la première fonction de l'Exemple 1 alors f est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si on considère à présent la troisième fonction, toujours de l'Exemple 1, cette fonction est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, si on restreint f à tout intervalle évitant 1 alors f est dérivable. Par ailleurs, si on considère sa resctiction à l'intervalle $[0, 2]$ et la suite $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$ alors la restriction de f à $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ est dérivable (sur les intervalles ouverts la fonction f est juste affine). Par ailleurs, on a

$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}} \frac{f(x) - f(x_1^+)}{x - x_1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(x - 1) - (0 - 1)}{x - 0} = 1,$$
$$\lim_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} \frac{f(x) - f(x_2^-)}{x - x_2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{(x - 1) - (1 - 1)}{x - 1} = 1,$$
$$\lim_{\substack{x \to x_2 \\ x > x_2}} \frac{f(x) - f(x_2^+)}{x - x_2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$
$$\lim_{\substack{x \to x_3 \\ x < x_3}} \frac{f(x) - f(x_3^-)}{x - x_3} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

Ainsi f se prolonge en une fonction dérivable sur $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$. On peut utiliser un raisonnement assez similaire pour démontrer que la deuxième fonction de l'Exemple 1 est également dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Donnons à présent un exemple de fonction qui n'est pas dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ici f n'est pas dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. On remarque dans un premier temps que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, il est clair que f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et en 0 on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\right).$$

Par ailleurs, la restriction de f à tout intervalle évitant le point 0 est dérivable. Considérons à présent la restriction de f à (par exemple) l'intervalle $[-2, 1]$. On considère également la suite de points $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$. La fonction f restreinte aux intervalles ouverts $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ est dérivable. On montre facilement que f se prolonge en une fonction dérivable sur l'intervalle fermé $[x_1, x_2]$ (dans ce cas f est juste la fonction nulle sur cet intervalle). Par contre f ne se prolonge pas en une fonction dérivable sur l'intervalle fermé $[x_2, x_3]$. En effet, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc $f'(0^+)$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable par morceaux.

Remarque 1. *Pour étudier la continuité, dérivabilité, continuité par morceaux ou dérivabilité par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'une fonction a-périodique il suffit de faire des études similaires à celles faites dans les exemples précédents sur un intervalle de longueur a, comme par exemple $[-a/2, a/2]$ ou $[0, a]$.*

Pour conclure cette note rappelons qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite C^1 sur $\mathbb{R}$ si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec f' continue sur $\mathbb{R}$. Elle est par contre C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si f est dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$ et si f' est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de reprendre les exemples ci-dessus.

Université de Technologie de Compiègne, LMAC, 60200 Compiègne, France
Email address: `antoine.zurek@utc.fr`