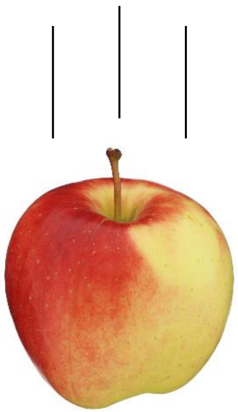
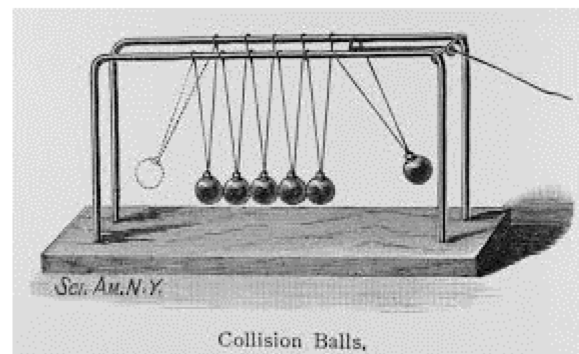
Rappels de mécanique





DAMAY Nicolas
Département IM

Les lois de la mécanique

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

La physique aristotélicienne *(Grèce antique)*

- Les objets se déplacent naturellement vers leurs lieux d'origine
  - « La pierre tombe car elle vient de la Terre »
  - « Le feu s'élève car il vient de l'air »
- Un choc entre deux objets provoque leur mouvement
- Mais… pourquoi une pierre lancée en l'air continue son mouvement avant de retomber ?

L'***impetus*** (*au moyen âge, vers le VIème siècle*)

- « L'action initiale effectuée sur la pierre lui communique un ***impetus***, et c'est cet ***impetus*** qui entretient le mouvement »
- « L'***impetus*** perd peu à peu de sa force à cause de la pénétration de la pierre dans le milieu aérien, et une fois cet ***impetus*** épuisé, la pierre prend son mouvement naturel et tombe. »

► Puis Newton et ses lois du mouvement au XVIIème siècle…

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

1) Principe d'inertie

- **Version d'origine** : « *Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.* »
- **Version actuelle** : « *Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie G d'un système est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul.* »

$$\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \vec{0} \ \ ssi \ \sum \vec{F}_G = \vec{0}$$

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

2) PFD : Principe fondamental de la dynamique de translation

- **Version d'origine** : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

- **Version actuelle** : « Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement $\vec{p}$ est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide. »

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- Très souvent, la masse est constante et on obtient :

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

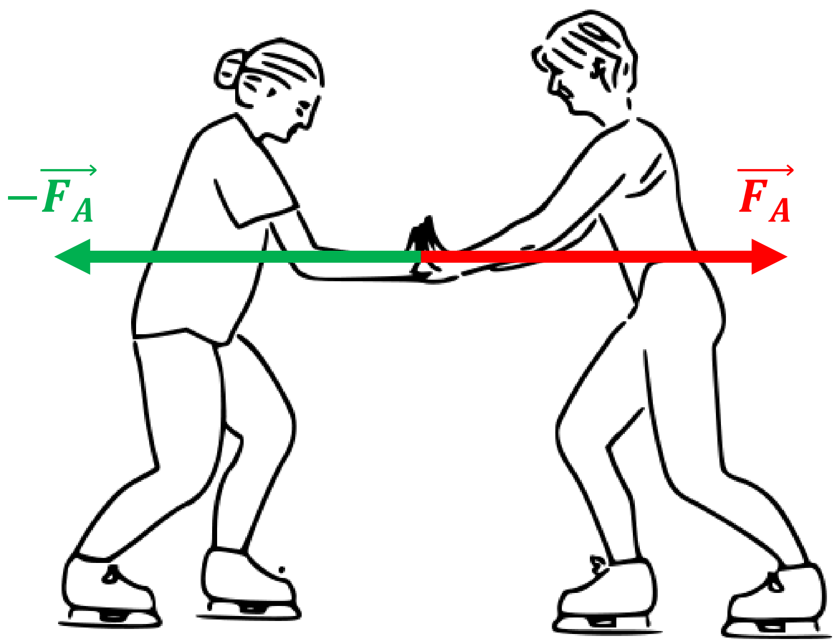
- $\vec{\gamma}$ étant l'accélération du centre d'inertie

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

3) Principe d'action-réaction

- **Version d'origine** : « *L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires.* »
- **Version actuelle** : « *Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.* »



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

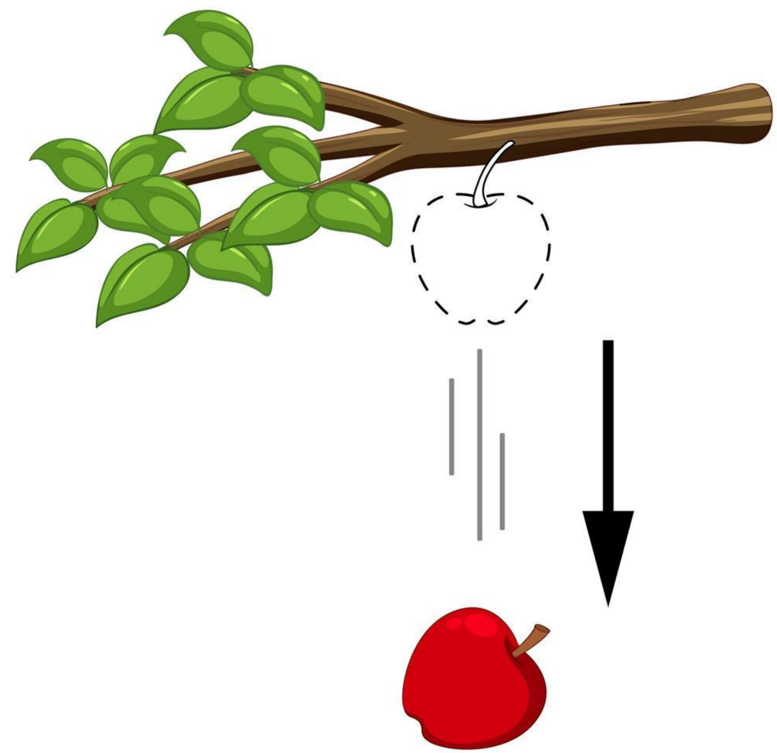
Modélisation dynamique

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Objet en chute libre

- Représentation de la pomme ?
- Quelles forces ?
- Quels résultats ?



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

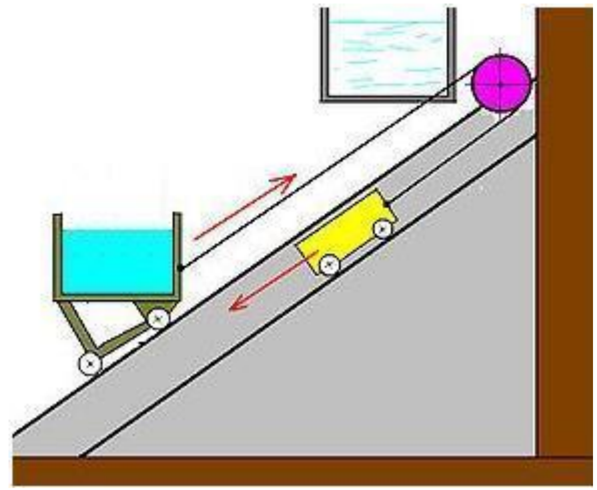
www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Système comprenant plusieurs éléments

- Cas d'un ascenseur à bateaux sur une pente avec une poulie et un contrepoids

- Représentation des éléments ?

- Quelles forces ? Appliquées où ?



- **Objectif en SY03 : quel couple fournir à la poulie pour piloter le système selon un profil de mission donné ?**

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Et caetera…

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

utc Formation

Forces usuelles en SY03

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

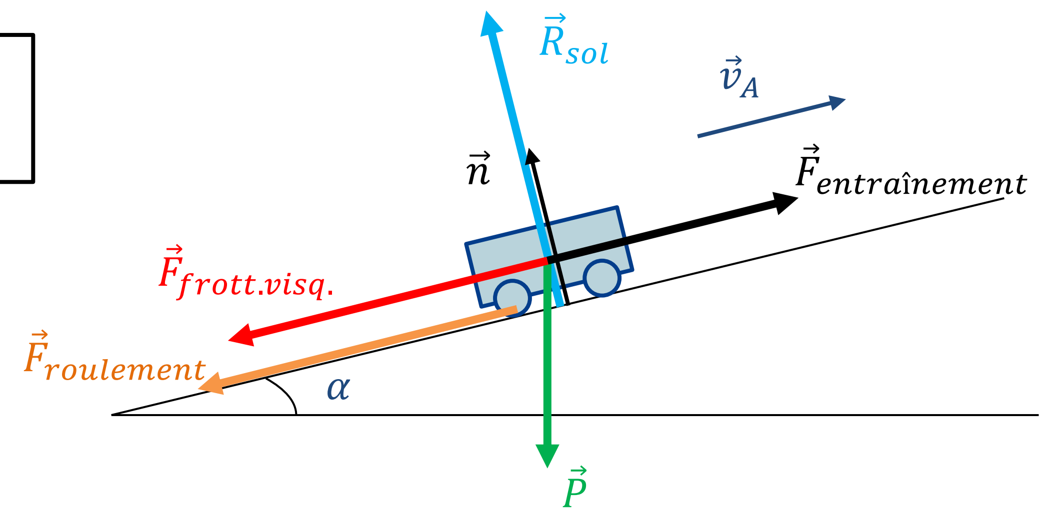
Cas d'un roulement sur le sol

- **On isole le chariot**
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Réaction du sol : $\vec{R}_{sol} = P.\cos\alpha\,.\vec{n}$ ($\vec{n}$: vecteur unitaire normal au sol)
- Résistance au roulement : $\vec{F}_{roulement} = C_r.\left|\overrightarrow{R_{sol}}\right|.\left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$
- Frottements visqueux : $\vec{F}_{roulement} = \frac{1}{2}\rho.SC_x.|\vec{v}_A|^2.\left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$
- Force d'entraînement : *« variable »*

A ne pas oublier !

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

(dynamique)



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

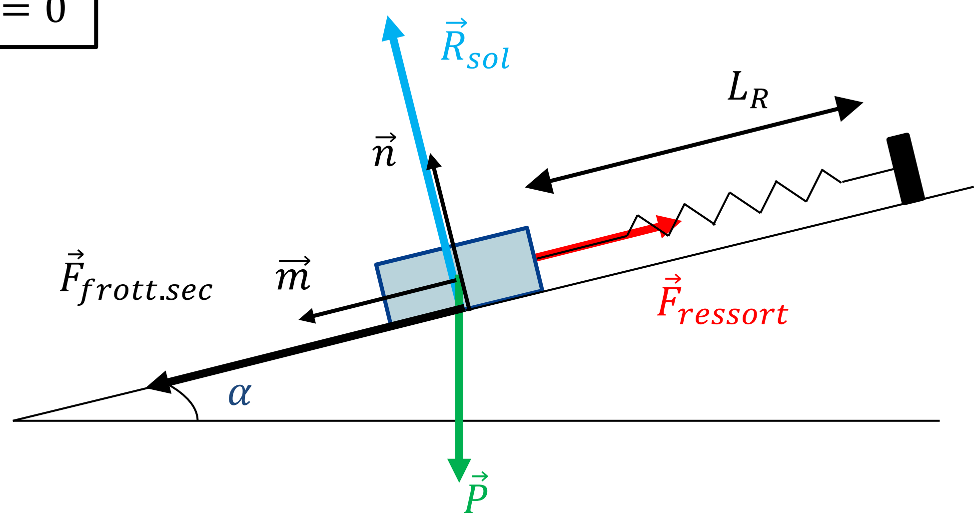
utc Formation

Cas de masse et ressort statiques sur un plan incliné

- **On isole la masse**
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Réaction du sol : $\vec{R}_{sol} = N.\vec{n} = P.\cos\alpha\,.\vec{n}$ ($\vec{n}$: vecteur unitaire normal au sol)
- Frottements sec : $\vec{F}_{roulement} = \mu_S.N.\vec{m} = \mu_S.P.\cos\alpha\,.\vec{m}$ ($\vec{m}$: vecteur unitaire)
- Rappel du ressort : $\vec{F}_{roulement} = k.\Delta L = k.(L_R - L_{vide})$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{R}_{sol} + \vec{F}_{frott.sec} + \vec{F}_{ressort} = \vec{0}}$$

(statique)



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

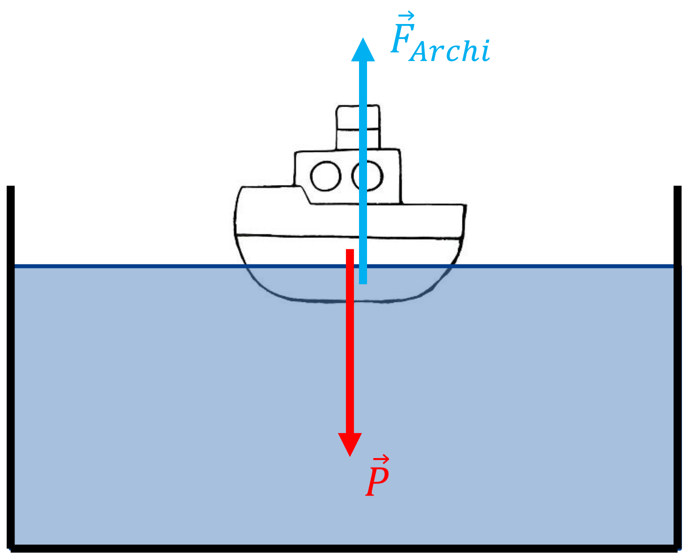
utc Formation

Cas d’un bateau à l’arrêt

- **On isole le bateau**
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Poussée d’Archimède : $\vec{F}_{Archi} = -M_f.\vec{g} = -\rho.V_f.\vec{g}$
- Equilibre lorsque le volume d’eau déplacé = le poids du bateau

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}_{Archi} = \vec{0}}$$

(statique)

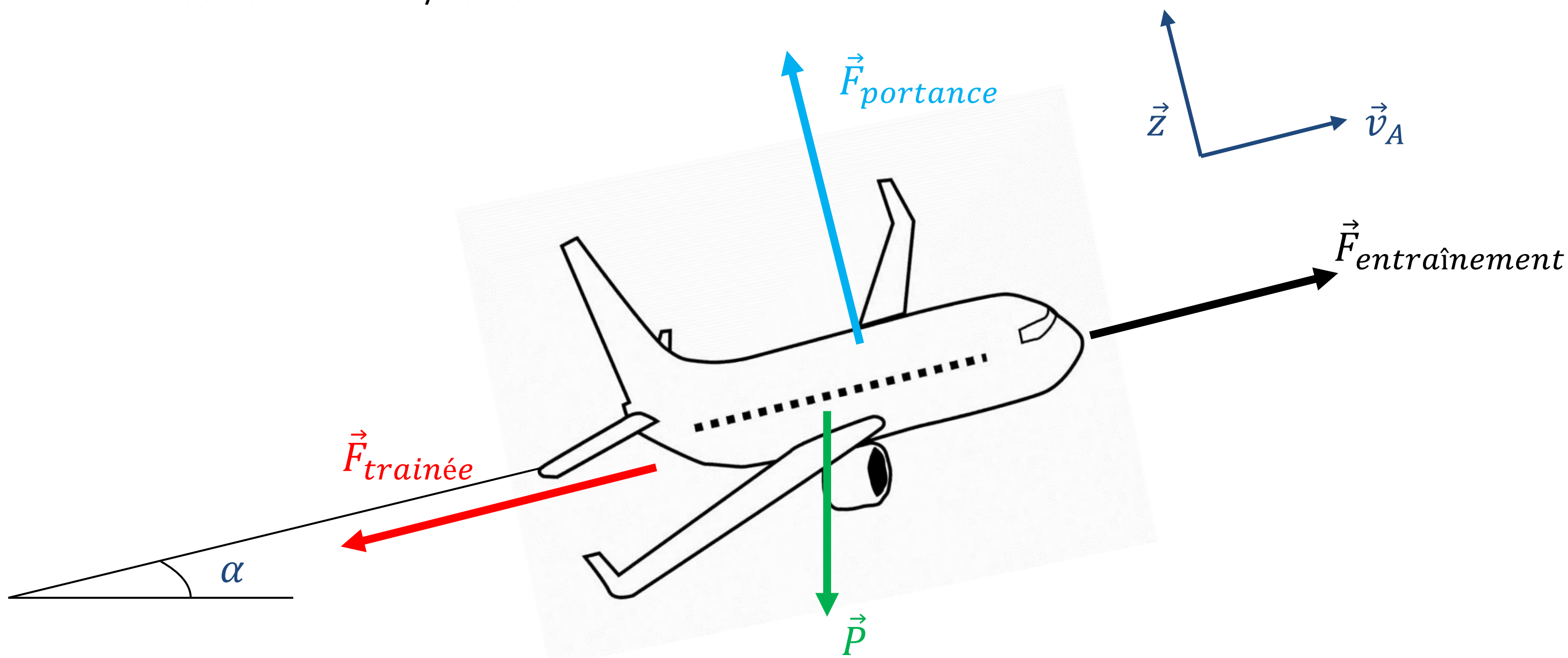


Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Cas d'un avion

- **On isole l'avion (*attention : tout se fait par rapport au référentiel de l'air*)**
- Force de pesanteur : $\vec{P} = M\vec{g}$
- Trainée aérodynamique : $F_{trainée} = \frac{1}{2}\rho . S_x \boldsymbol{C_x} . |\vec{v}_A|^2 . \left(\frac{-\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|}\right)$ (S_x : *surface frontale*)
- Portance : $\vec{F}_{portance} = \frac{1}{2}\rho . S_z \boldsymbol{C_z} . |\vec{v}_A|^2 . \vec{z}$ (S_z : *surface des ailes*)
- Poussée des réacteurs/hélices : « *variable* »



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

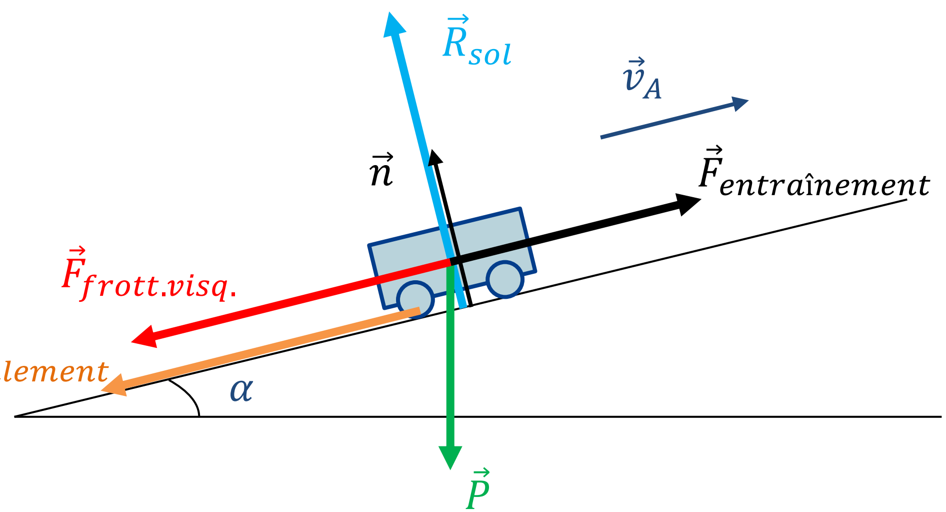
Mise en application du PFD

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Roulement sur le sol

- **On isole le chariot**
- On cherche à déterminer $\vec{F}_{entraînement}$
- PFD : $M\frac{d\overrightarrow{v_A}}{dt} = \vec{F}_{entraînement} + \vec{R}_{sol} + \vec{F}_{frott.visqueux} + \vec{F}_{roulement} + \vec{P}$
- Projection selon l'axe de $\overrightarrow{v_A}$:
- $M\frac{dv_A}{dt} = F_{entraînement} - \frac{1}{2}\rho.SC_x.\boldsymbol{v_A^2} - C_r.M.g.\cos\alpha - M.g.\sin\alpha$
- **On obtient :** $\boldsymbol{F_{entraînement} = M\frac{dv_A}{dt} + \frac{1}{2}\rho.SC_x.v_A^2 + M.g.(C_r.\cos\alpha + \sin\alpha)}$



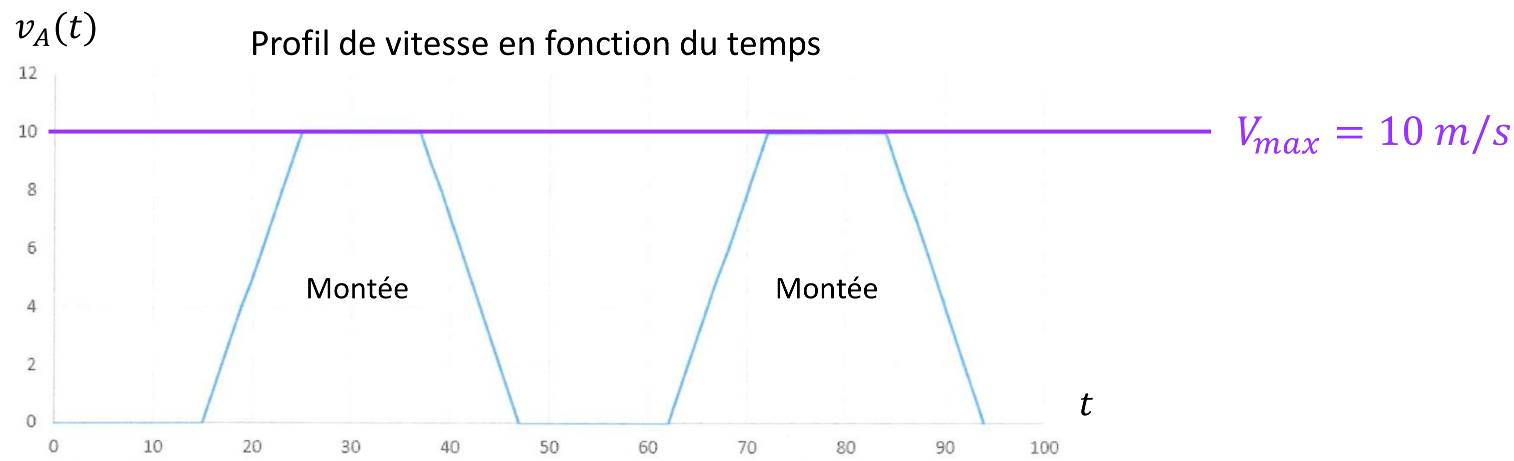
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Roulement sur le sol : poursuite du calcul

- $F_{entraînement} = M\frac{dv_A}{dt} + \frac{1}{2}\rho.SC_x.v_A^2 + M.g.(C_r.\sin\alpha + \cos\alpha)$

Issu du cahier des charges



- Calcul de $F_{entraînement}$ au cours du temps ?
  - Accès à v_A et aussi à sa dérivée temporelle $\frac{dv_A}{dt}$
  - Accès aux données : M, ρ, $S\ C_x$, etc.
- Calcul de la puissance et de l'énergie à la roue p_R au cours du temps ?
  - $p_R(t) = v_A(t) \times F_{entraînement}(t)$
  - $E = \int p_R(t).dt$

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

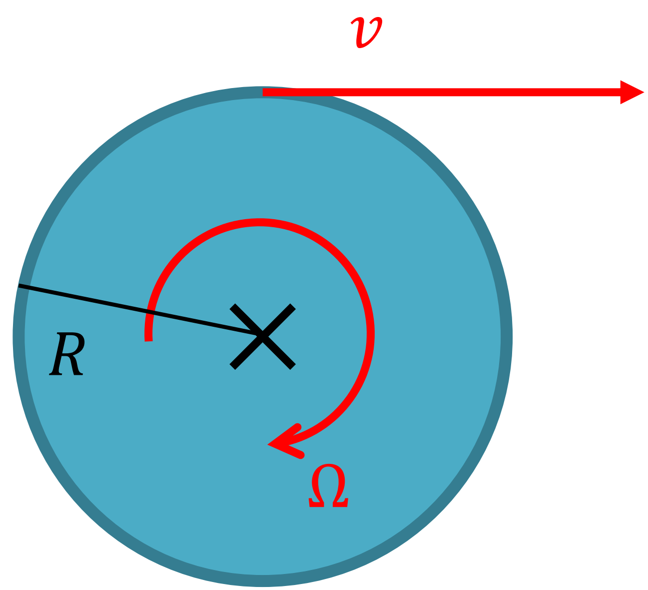
Application à des rotations

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Liens entre rotation et translation : cinétique

- Vitesse tangentielle : $v = R \times \Omega$
- Accélération : $\frac{dv}{dt} = R \times \frac{d\Omega}{dt}$



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

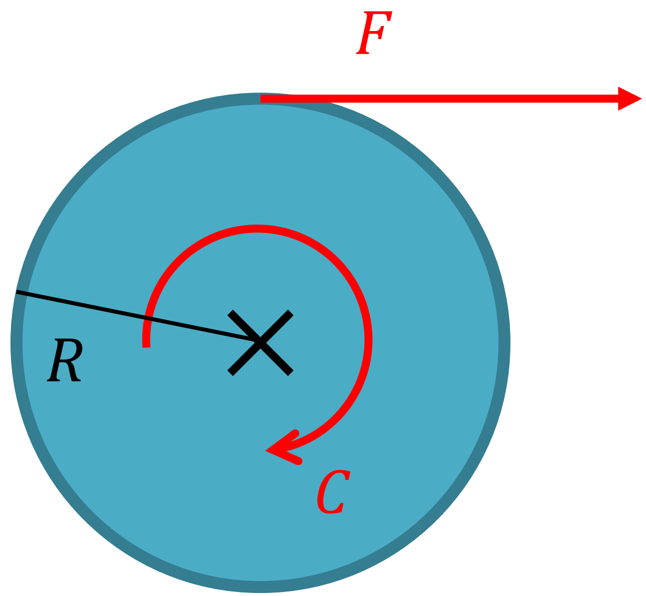
www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Liens entre rotation et translation : efforts et puissance

- Force tangentielle : $F = C/R$
- Puissance : $F \times v = \frac{C}{R} \times \Omega \times R = C \times \Omega$
- ~~Masse~~ => Moment d'inertie (kg.m²) :

  Formule générale : $J = \int r^2 . dm$

  Cas de plusieurs solides : $J = \sum m_i . r_i^2$



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

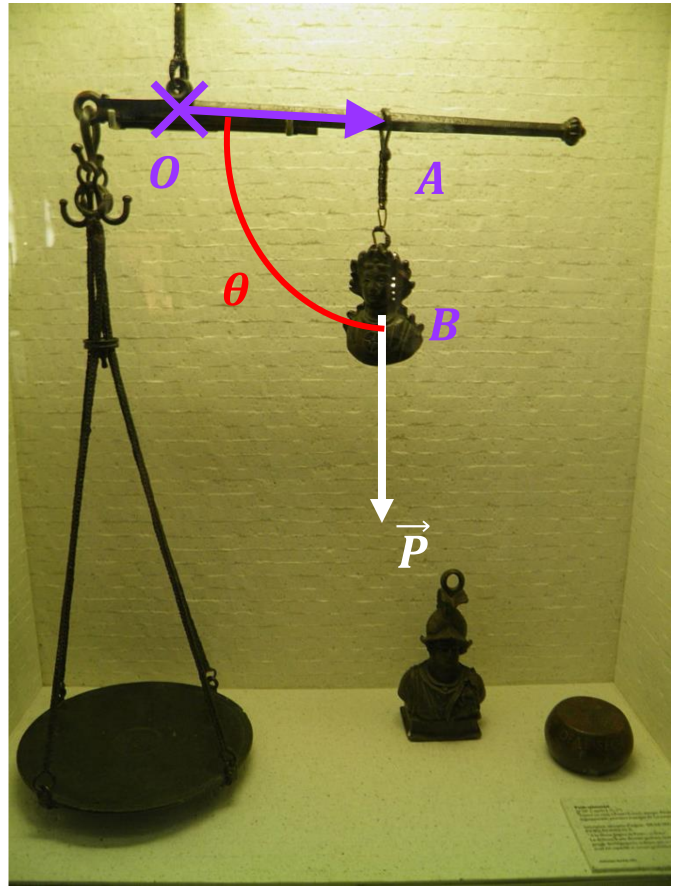
PFD en rotation

$$J\frac{d\overrightarrow{\Omega_O}}{dt} = \sum \vec{C}_{ext}$$

- J : inertie de rotation
- $\vec{C}_{ext}$: couples extérieurs

Lien entre force et couple

- Moment scalaire de $\vec{P}$ par rapport au point O :
- $M_P = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\vec{P}\|.\sin\theta$
- Inertie équivalente à la masse m lorsqu'elle tourne autour du point O :
- $\mathrm{J_m} = m.\left[\|\overrightarrow{OA}\| + \|\overrightarrow{AB}\|.\sin\theta\right]^2$



Balance romaine

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

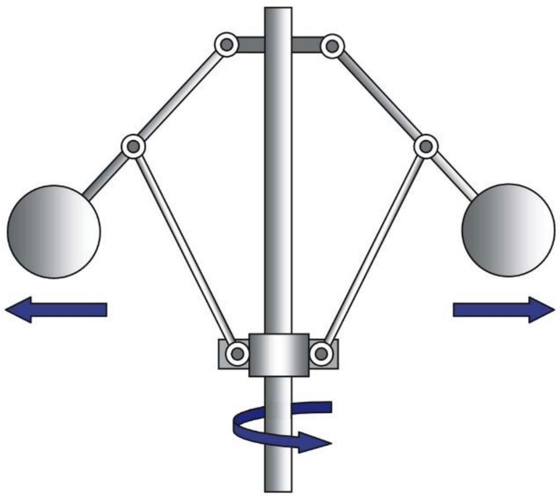
Moments d’inertie

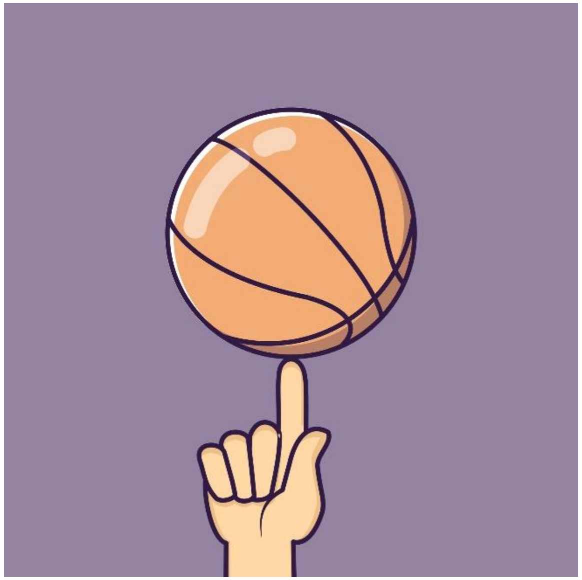
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

L'inertie dans le cas de la rotation

- $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ ou $J_\Delta = \iiint d(x, \Delta).dm$

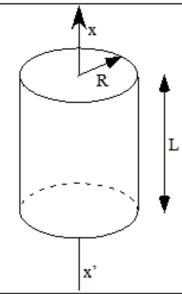
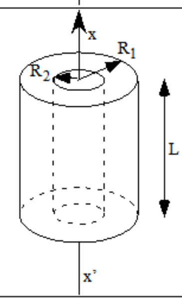
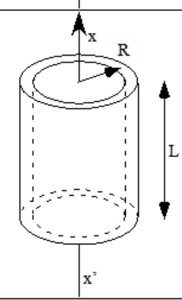




Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

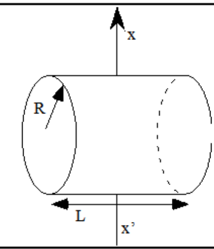
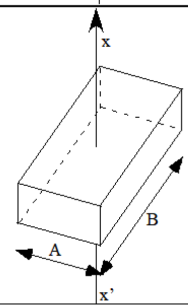
Quelques moments d’inertie classiques

		Moment d’inertie
Cylindre plein		$J = \frac{1}{2} M R^2$
Cylindre annulaire		$J = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$ /!\
Cylindre annulaire mince		$J = M R^2$

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Quelques moments d’inertie classiques

		Moment d’inertie
Cylindre plein transverse		$J = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{L^2}{3} \right)$
Parallélépipède rectangle		$J = \frac{1}{12} M (A^2 + B^2)$

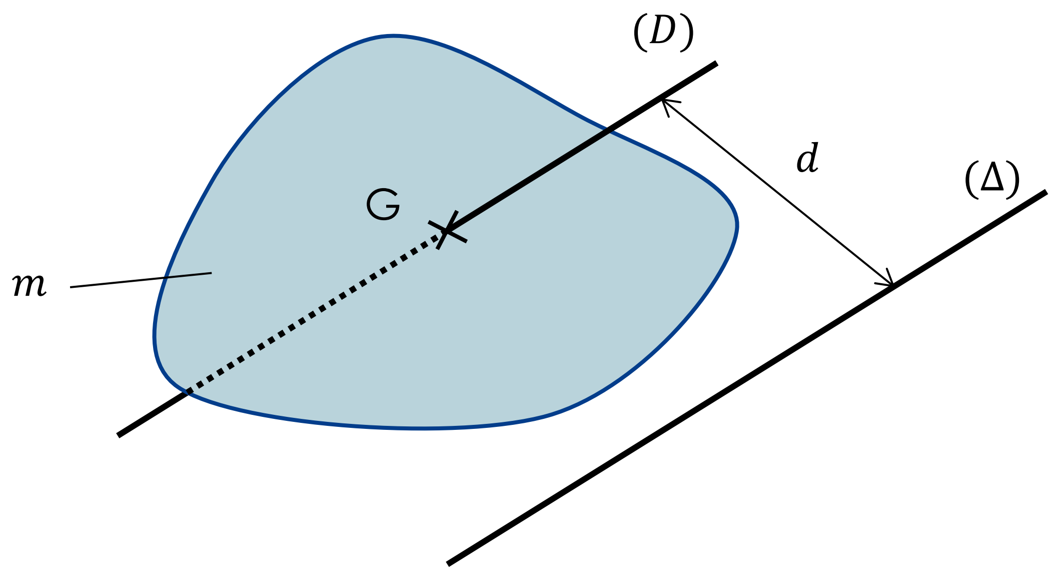
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Théorème de Huygens

- Soit un solide de masse m et deux axes parallèles dont l'un, noté (D), passe par le centre de masse G et le second, noté (Δ), lui est distant de d.
- Leurs moments d'inertie respectifs sont reliés par le théorème de Huygens :

$$\boxed{J_{/\Delta} = J_{/\mathrm{D}} + m\,d^2}$$



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

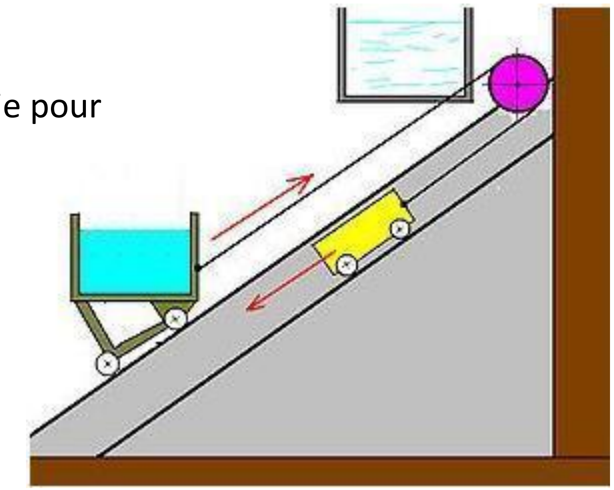
Systèmes comprenant plusieurs éléments

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Système comprenant plusieurs éléments

- Cas d'un chariot sur une pente avec une poulie et un contrepoids
- On cherche à évaluer le couple que doit fournir la poulie pour entraîner le chariot
- Il faut repérer et isoler les différents solides
- Chaque solides fournit des équations
- L'ensemble des équations permet de résoudre le problème

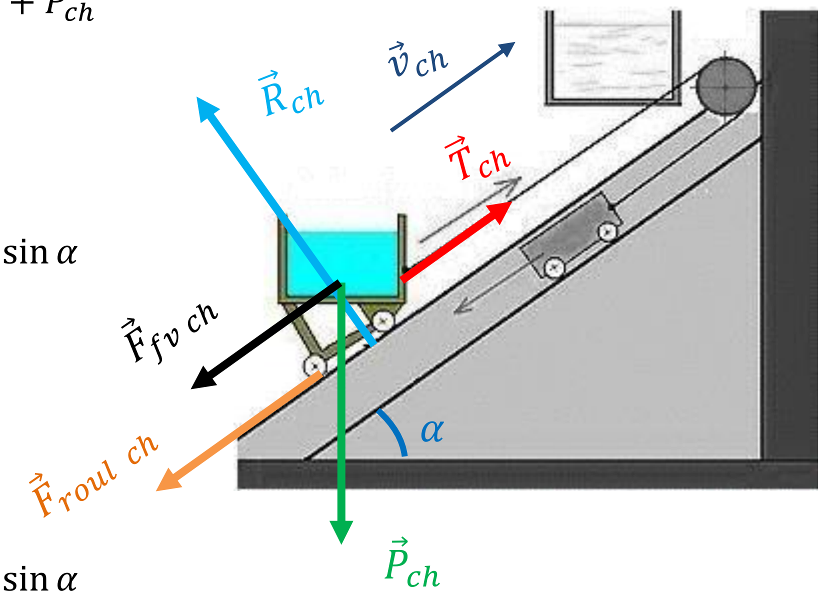


Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Isoler un solide

- Isolement du chariot de masse m_{ch}
- $m_{ch} \dfrac{d\overrightarrow{v_{ch}}}{dt} = \vec{T}_{ch} + \vec{R}_{ch} + \vec{F}_{fv\ ch} + \vec{F}_{roul\ ch} + \vec{P}_{ch}$



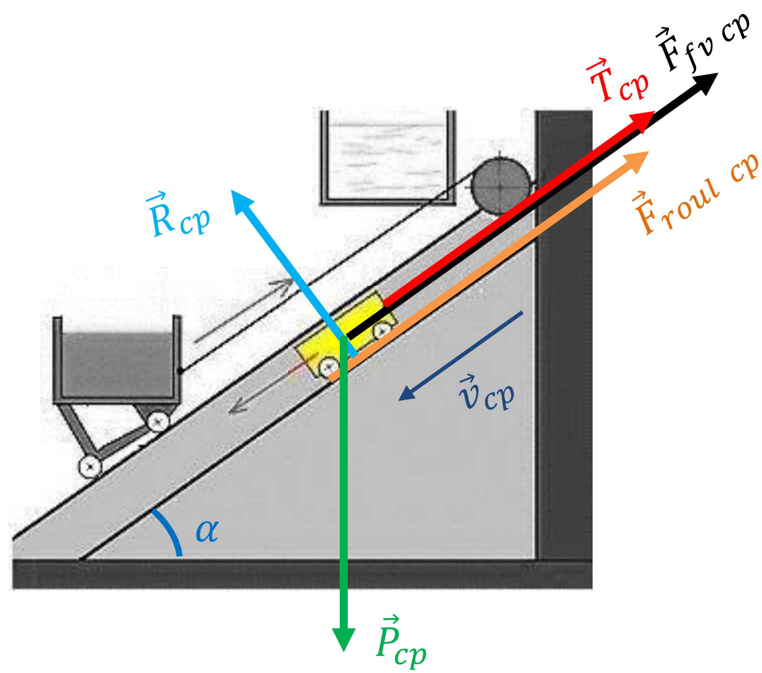
- Projection selon l'axe du déplacement
- $m_{ch} \dfrac{dv_{ch}}{dt} = T_{ch} - F_{fv\ ch} - F_{roul\ ch} - P_{ch} \sin \alpha$
- Ceci nous permet d'exprimer T_{ch}
- $T_{ch} = m_{ch} \dfrac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin \alpha$
- **Nous pouvons maintenant isoler le contrepoids**

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Isoler un solide

- Isolement du contrepoids de masse m_{cp}
- $m_{cp}\frac{d\overrightarrow{v_{cp}}}{dt} = \vec{T}_{cp} + \vec{R}_{cp} + \vec{F}_{fv\ cp} + \vec{F}_{roul\ cp} + \vec{P}_{cp}$
- Projection selon l'axe du déplacement
- $m_{ch}\frac{dv_{cp}}{dt} = -T_{cp} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp}\sin\alpha$
- Ceci nous permet d'exprimer T_{ch}
- $T_{cp} = -m_{ch}\frac{dv_{cp}}{dt} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp}\sin\alpha$
- **Nous pouvons maintenant isoler la poulie**

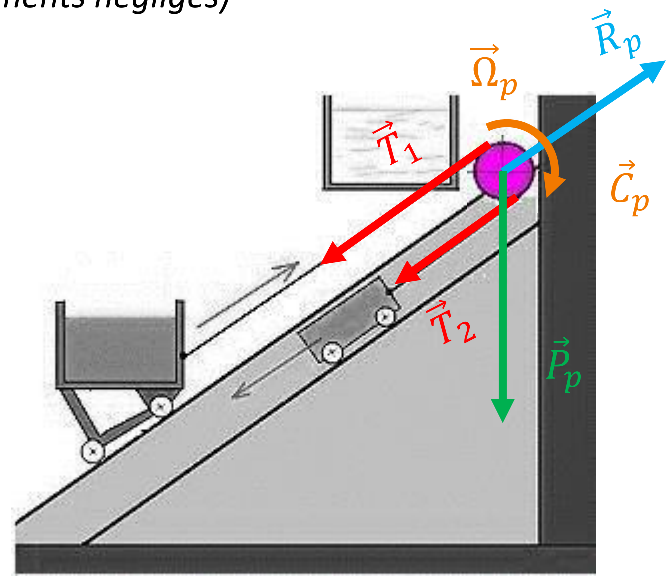


Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Isoler un solide

- Isolement de la poulie de rayon r_p et d'inertie J_p *(frottements négligés)*
- $J_p \frac{d\vec{\Omega}_p}{dt} = \vec{C}_p + \vec{C}_{T1} + \vec{C}_{T2} + \vec{C}_{Rp} + \vec{C}_{Pp}$



- Projection selon l'axe de la poulie
- $J_p \frac{d\,\Omega_p}{dt} = C_p - r_p \times T_1 + r_p \times T_2$

- Ceci permet d'exprimer C_p
- $C_p = J_p \frac{d\,\Omega_p}{dt} + r_p \times T_1 - r_p \times T_2$

- L'isolement de la poulie nous permet également d'écrire que $v_{ch} = v_{cp}$
- En isolant les câbles et en négligeant leurs masses, on obtiendrait $T_1 = T_{ch}$ et $T_2 = T_{cp}$, ce qui permet de relier les résultats entre eux

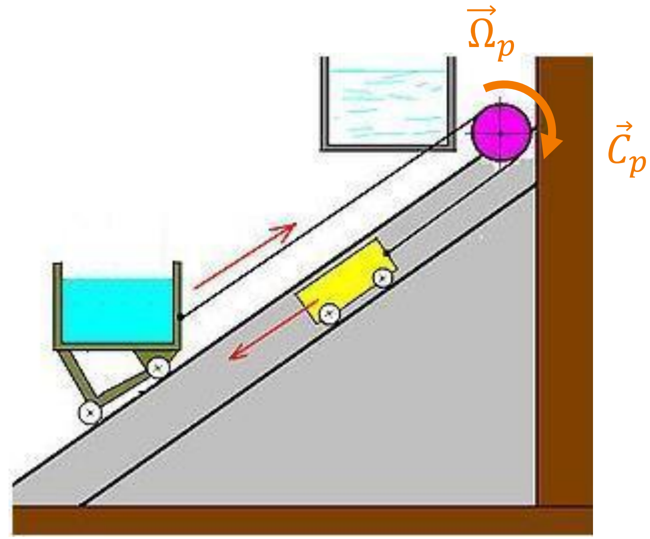
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Système comprenant plusieurs éléments

Rappel des équations précédentes

- $C_p = J_p \frac{d\,\Omega_p}{dt} + r_p \times (T_1 - T_2)$
- $T_{ch} = T_1 = m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin\alpha$
- $T_{cp} = T_2 = -m_{cp} \frac{dv_{cp}}{dt} - F_{fv\ cp} - F_{roul\ cp} + P_{cp} \sin\alpha$



- $C_p = J_p \frac{d\,\Omega_p}{dt} + r_p \times (m_{ch} \frac{dv_{ch}}{dt} + F_{fv\ ch} + F_{roul\ ch} + P_{ch} \sin\alpha + m_{cp} \frac{dv_{cp}}{dt} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ cp} - P_{cp} \sin\alpha)$
- **Or,** $\boldsymbol{v_{ch} = v_{cp}}$ **et** $\boldsymbol{v_{ch} = \Omega_p \times r_p}$
- $C_p = J_p \frac{d\,\Omega_p}{dt} + r_p \times \left[(m_{ch} + m_{cp}) \frac{dv_{ch}}{dt} + (P_{ch} - P_{cp}) \sin\alpha + F_{fv\ ch} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ ch} + F_{roul\ cp}\right]$

$$\boldsymbol{C_p = \underbrace{[J_p + r_p^2\,(m_{ch} + m_{cp})]}_{\text{Inertie équivalente}} \frac{d\Omega_p}{dt} + r_p \times [\underbrace{(P_{ch} - P_{cp})}_{\text{Aide du contrepoids}}\, \sin\alpha + \underbrace{F_{fv\ ch} + F_{fv\ cp} + F_{roul\ ch} + F_{roul\ cp}}_{\text{Ensemble des frottements}}]}$$

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Transfert d’énergie mécanique

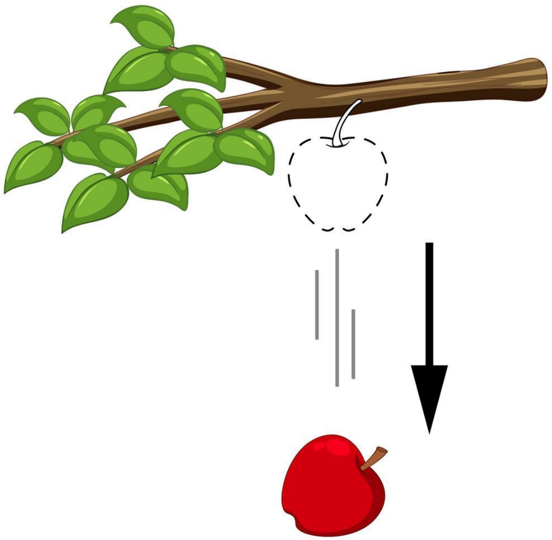
Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Modélisation mécanique grâce à l’énergie

- Quelles énergies en présence ?

- Quels bilans ?

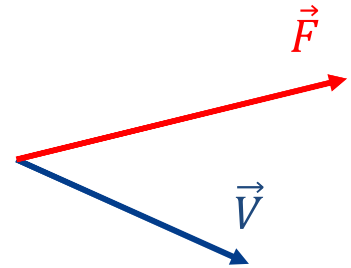


Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

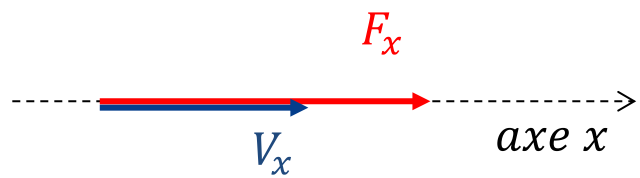
www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Puissance mécanique

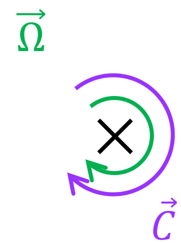
- Translation : $P_M = \vec{V}\,.\,\vec{F}$



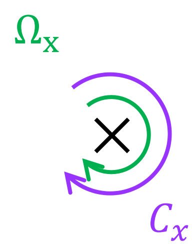
- Selon l’axe x : $P_{M,x} = V_x . F_x$



- Rotation : $P_M = \vec{\Omega}\,.\,\vec{C}$



- Selon l’axe x : $P_{M,x} = \Omega_x . C_x$

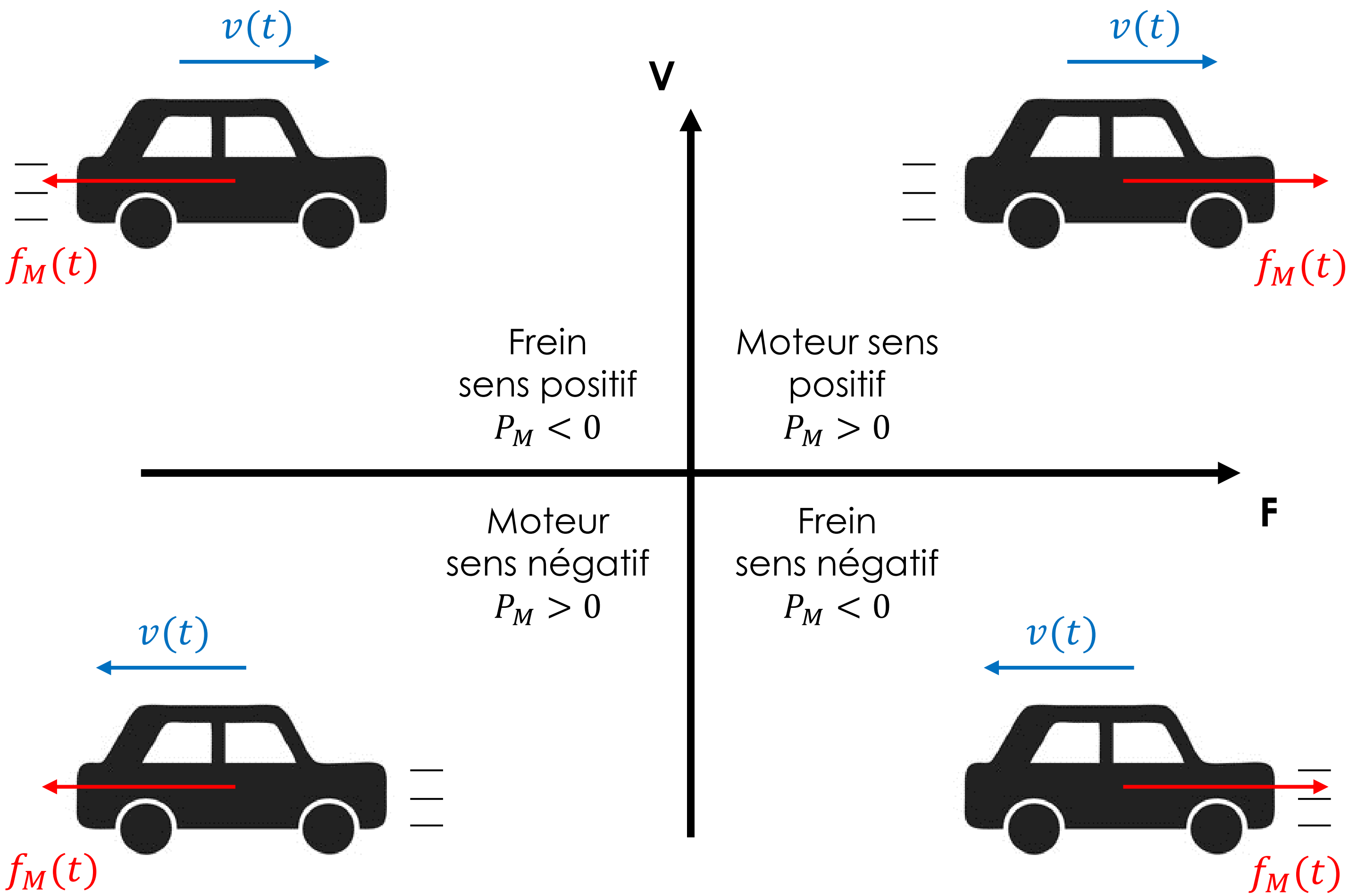


(axe x $\perp$ à la diapo)

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

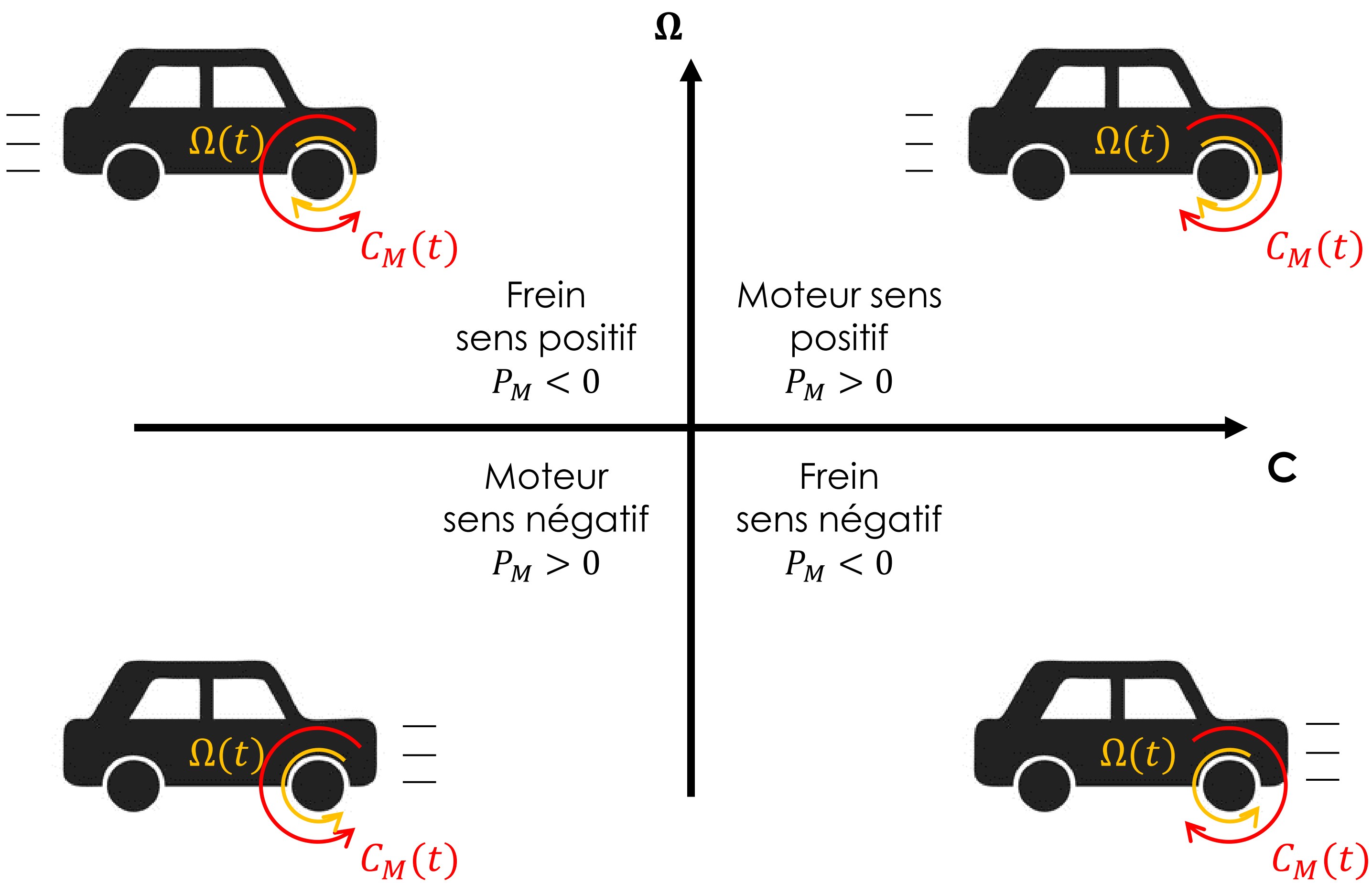
Puissance mécanique : moteur ou frein



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Puissance mécanique : moteur ou frein



Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr

Stockage d'énergie mécanique

- Eléments réversibles : peuvent absorber ou fournir de l'énergie

Energie	Augmentation de W_m	Baisse de W_m
Pesanteur $W_g = mgh$	h augmente	h diminue
Ressort $W_R = 1/2\ K_R\ X^2$	|x| augmente	|x| diminue
Cinétique $W_c = 1/2\ m\ V^2$	|v| ou |Ω| augmente	|v| ou |Ω| diminue
	$\Rightarrow$ frein	$\Rightarrow$ moteur

Dissipation d'énergie mécanique

- Eléments non réversibles : ne font qu'absorber de l'énergie mécanique
- Frottements aérodynamiques : $W = \int_0^t \overrightarrow{F_{FV}}.\vec{V}.dt = -\frac{1}{2}\rho.SC_x \int_0^t V^3.dt$

Nicolas DAMAY
Maître de conférences
Département IM

www.utc.fr
nicolas.damay@utc.fr