TD MT12

1. Chapitre 1

Exercice 1.

(1) Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné, non-dégénéré. Prouver les propriétés suivantes :

(a) Si f est une fonction R-intégrable sur I alors pour toute constante c la fonction cf est aussi R-intégrable sur I et de plus $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

(b) Si f et g sont deux fonctions R-intégrables sur I alors la fonction $f+g$ est aussi R-intégrable sur I et de plus $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(c) Si f et g sont deux fonctions R-intégrables sur I vérifiant $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b g(x)dx$.

(2) Soit f une fonction continue sur I admettant une primitive F (à savoir, il existe une fonction dérivable F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$). Alors,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas R-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 3.

(1) En utilisant des IPP calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^\pi x\,\cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 x\,\arctan(x)\,dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$

(2) En utilisant un changement de variable calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}, \quad \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$

Exercice 4.

Date: 6 septembre 2024.

(1) Soit f une fonction continue. On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, a]$ (avec $a > 0$). Pour ce faire on utilise la méthode des rectangles à gauche. On considère un entier naturel $N \geq 1$ et une suite équi-répartie de points $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = a$ avec $x_k = ka/N$ pour $k = 0, \ldots, N$. Alors on a la formule suivante d'approximation

$$I = \int_0^a f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = I_N.$$

(a) Représenter géométriquement la méthode des rectangles à gauche.

(b) Si f est C^1 monter l'estimation d'erreur suivante :

$$|I - I_N| \leq \frac{a^2}{2N} \sup_{x\in[0,a]} |f'(x)|.$$

(2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tan\left(\frac{k}{N}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N^2+k^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \log\left(\frac{N}{N+k}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Exercice 6. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Montrer que si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel doté d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Alors pour tout $x, y \in E$ on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

avec égalité si x et y sont colinéaires.

Exercice 7. Montrer que une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace euclidien E est une famille libre.

Exercice 8.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) montrer que

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

est une norme sur E. Cette norme est-elle induite par un produit scalaire ?

(2) Soit $E = C^0([0,1];\mathbb{C})$, montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

est un produit hermitien. Écrire la définition de la norme associée à ce produit hermitien.

(3) Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée. Montrer que

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Exercice 9.

(1) Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b < +\infty$). On considère l'application

$$\begin{aligned} <\cdot,\cdot>: \quad & E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \longrightarrow <f,g>= \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Montrer que cette application définie un produit scalaire sur E, en indiquant sa norme associée. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) Soit f une fonction dérivable définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f' vérifie la propriété suivante :

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq M, \quad \text{avec } M \text{ une constante positive.}$$

On considère pour un entier naturel $N \geq 1$ les points $x_k = \frac{k}{N}$, pour $k = 0, \cdots, N$ et on note

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|I - S_N| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$$

en précisant la valeur de α.