MT09 A24 - Feuille de TD n° 1
Algèbre linéaire

À partir de ce TD, dans tout ce qui suit on notera systématiquement $\boldsymbol{A}_j$ le j-ème vecteur colonne d'une matrice A et $\underline{\boldsymbol{A}}_i$ le i-ème vecteur ligne de A.

Exercice 1 : produits matrice-vecteur et matrice-matrice

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. Vérifiez que

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{x} \\ \underline{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{A}}_m\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i\, \underline{\boldsymbol{A}}_i = \left[\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}_n\right].$$

2. Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_m\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Que valent $A\boldsymbol{e}_j$ $(1 \leq j \leq n)$? Que valent $\boldsymbol{f}_i^T A$ $(1 \leq i \leq m)$?
3. Quelle est la taille de $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Vérifiez que

$$AB = \left[A\boldsymbol{B}_1, A\boldsymbol{B}_2, ..., A\boldsymbol{B}_p\right] = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{A}}_1 B \\ \underline{\boldsymbol{A}}_2 B \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{A}}_m B \end{pmatrix}.$$

5. Montrez que

$$A = \boldsymbol{f}_1\underline{\boldsymbol{A}}_1 + \boldsymbol{f}_2\underline{\boldsymbol{A}}_2 + ... + \boldsymbol{f}_m\underline{\boldsymbol{A}}_m$$

et

$$A = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{e}_1^T + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e}_2^T + ... + \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{e}_n^T.$$

6. Soit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Que vaut le produit ΛA ?
7. Soit $\Lambda' = \mathrm{diag}(\lambda'_k) \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Que vaut le produit $B\Lambda'$?

Exercice 2 : factorisation QR

On note $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est un procédé séquentiel permettant de construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_n\}$ à partir d'une famille de vecteurs libres $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. On rappelle ci-dessous sa construction :

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{q}}_1 = \boldsymbol{A}_1, \quad \alpha_1 = \|\hat{\boldsymbol{q}}_1\|, \quad \boldsymbol{q}_1 = \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_1}{\alpha_1},\\
&\hat{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{A}_2 - \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{q}_1\rangle\, \boldsymbol{q}_1, \quad \alpha_2 = \|\hat{\boldsymbol{q}}_2\|, \quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_2}{\alpha_2},\\
&\vdots\\
&\hat{\boldsymbol{q}}_n = \boldsymbol{A}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_k\rangle\, \boldsymbol{q}_k, \quad \alpha_n = \|\hat{\boldsymbol{q}}_n\|, \quad \boldsymbol{q}_n = \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_n}{\alpha_n}.
\end{aligned}$$

1. Soit $A = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n] \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_n] \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
2. Vérifiez que
$$\boldsymbol{A}_1 = \alpha_1\, \boldsymbol{q}_1$$
et
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2\end{bmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1 & \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{q}_1\rangle \\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}).$$
3. Montrez par récurrence que
$$A = QR$$
avec
$$R = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{q}_1\rangle & \langle \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{q}_1\rangle & \dots & \langle \boldsymbol{A}_{n-1}, \boldsymbol{q}_1\rangle & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_1\rangle \\
0 & \alpha_2 & \langle \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{q}_2\rangle & \dots & \langle \boldsymbol{A}_{n-1}, \boldsymbol{q}_2\rangle & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_2\rangle \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_{n-1}\rangle \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n
\end{pmatrix}$$
4. Pour $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, on souhaite résoudre le système linéaire
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$
Montrez que le système est équivalent à
$$R\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$$
où $\tilde{\boldsymbol{b}} = Q^T\boldsymbol{b}$. On obtient ainsi un système triangulaire supérieur équivalent.

Exercice 3 : produit de matrices triangulaires inférieures

1. Calculez le produit de matrices triangulaires inférieures
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0\\ \ell_{31} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \ell_{32} & 1\end{pmatrix}.$$
Que constatez-vous ?
2. En déduire le produit de matrices
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0\\ \ell_{31} & 0 & 1 & 0\\ \ell_{41} & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \ell_{32} & 1 & 0\\ 0 & \ell_{42} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \ell_{43} & 1\end{pmatrix}.$$