MT09 A25 - Feuille de TD n° 1 Algèbre linéaire

À partir de ce TD, dans tout ce qui suit on notera systématiquement A_j le j-ème vecteur colonne d'une matrice A et \underline{A}_i le i-ème vecteur ligne de A.

Exercice 1: produits matrice-vecteur et matrice-matrice

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. Vérifiez que

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{x} \\ \underline{\boldsymbol{A}}_2 \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \underline{\boldsymbol{A}}_m \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i \, \underline{\boldsymbol{A}}_i = \left[\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_n \right].$$

- 2. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n et $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ la base canonique de \mathbb{R}^m . Que valent Ae_j $(1 \le j \le n)$? Que valent $f_i^T A$ $(1 \le i \le m)$?
- 3. Quelle est la taille de $y^T x$ et yx^T ?
- 4. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Vérifiez que

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{B}_1, A\mathbf{B}_2, ..., A\mathbf{B}_p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_1 B \\ \underline{\mathbf{A}}_2 B \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_m B \end{pmatrix}.$$

5. Montrez que

$$A = \mathbf{f}_1 \underline{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{f}_2 \underline{\mathbf{A}}_2 + \dots + \mathbf{f}_m \underline{\mathbf{A}}_m$$

et

$$A = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2^T + \dots + \mathbf{A}_n \mathbf{e}_n^T.$$

- 6. Soit $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_k) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Que vaut le produit ΛA ?
- 7. Soit $\Lambda' = \operatorname{diag}(\lambda'_k) \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Que vaut le produit $B\Lambda'$?

Exercice 2: factorisation QR

On note $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n . Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est un procédé séquentiel permettant de construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_n\}$ à partir d'une famille de vecteurs libres $\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n\}$ de \mathbb{R}^n . On

rappelle ci-dessous sa construction:

$$egin{aligned} \hat{m{q}}_1 &= m{A}_1, \quad lpha_1 = \|\hat{m{q}}_1\|, \quad m{q}_1 = rac{\hat{m{q}}_1}{lpha_1}, \ \hat{m{q}}_2 &= m{A}_2 - raket{m{A}_2, m{q}_1}{m{q}_1}, \quad m{q}_2 = \|\hat{m{q}}_2\|, \quad m{q}_2 = rac{\hat{m{q}}_2}{lpha_2}, \ &dots \ &dots \ \hat{m{q}}_n &= m{A}_n - \sum_{k=1}^{n-1} raket{m{A}_n, m{q}_k}{m{q}_k}, \quad m{lpha}_n = \|\hat{m{q}}_n\|, \quad m{q}_n = m{q}_n \ &dots \ ˙$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}_n = \boldsymbol{A}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_k \rangle \, \boldsymbol{q}_k, \quad \alpha_n = \|\hat{\boldsymbol{q}}_n\|, \quad \boldsymbol{q}_n = \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_n}{\alpha_n}.$$

- 1. Soit $A = [A_1, A_2, ..., A_n] \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $Q = [q_1, q_2, ..., q_n] \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- 2. Vérifiez que

$$\mathbf{A}_1 = \alpha_1 \, \mathbf{q}_1$$

 et

$$egin{bmatrix} m{A}_1 & m{A}_2 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} m{q}_1 & m{q}_2 \end{bmatrix} egin{pmatrix} lpha_1 & \langle m{A}_2, m{q}_1
angle \\ 0 & lpha_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}).$$

3. Montrez par récurrence que

$$A = QR$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \langle \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{A}_{n-1}, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_1 \rangle \\ 0 & \alpha_2 & \langle \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{A}_{n-1}, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_2 \rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} & \langle \boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{q}_{n-1} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

4. Pour $b \in \mathbb{R}^n$, on souhaite résoudre le système linéaire

$$Ax = b$$
.

Montrez que le système est équivalent à

$$Rx = \tilde{b}$$

où $\tilde{\boldsymbol{b}} = Q^T \boldsymbol{b}$. On obtient ainsi un système triangulaire supérieur équivalent.

Exercice 3 : produit de matrices triangulaires inférieures

1. Calculez le produit de matrices triangulaires inférieures

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Que constatez-vous?

2. En déduire le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \ell_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$