MT09 A25 - Feuille de TD n° 2

Système triangulaire, factorisation LU, calcul optimal de A^{-1}

Exercice 1 : coût de résolution d'un système triangulaire

Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire $u_{ij} = 0$ pour tout i, i > j, quel que soit $j \leq n - 1$. On souhaite résoudre le système linéaire

$$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

- 1. Écrire en pseudo-code l'algorithme de résolution du système linéaire.
- 2. L'inconnue x_i , $1 \le i \le n-1$ se calcule donc comme

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right).$$

Combien y a-t-il d'additions, multiplications et divisions à i donné? Rappel :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 3. Combien y a-t-il d'additions et de multiplications au total pour résoudre Ux = b?
- 4. Vérifiez que x_i peut aussi s'écrire

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \boldsymbol{w}_i^T \boldsymbol{x})$$

pour un certain vecteur $w_i \in \mathbb{R}^n$ à déterminer. Réécrire l'algorithme après cette remarque.

Exercice 2 : pivots de Gauss et factorisation LU

Soit la matrice A et le vecteur b définis par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système linéaire Ax = b (solution : $x = (-1, 0, 1, 0)^T$).
- 2. Donner la factorisation LU de A et calculer $\det(A)$ (on peut résoudre cette question conjointement avec la première).

Exercice 3 : algorithme de Doolittle

Soit A une matrice d'ordre n admettant une factorisation LU. En se souvenant que les matrices L et U sont triangulaires et que les termes diagonaux de L valent 1 :

- 1. Écrire l'expression de \underline{U}_1 en identifiant la première ligne de A avec la première ligne de LU.
- 2. Écrire l'expression de L_1 en identifiant la première colonne de A avec la première colonne de LU.
- 3. Écrire l'expression de \underline{U}_2 en identifiant la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU
- 4. Écrire l'expression de L_2 en identifiant la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU.
- 5. Soit $k, 2 \le k \le n$ quelconque. Écrire l'expression de \underline{U}_k en identifiant la k-ième ligne de A avec la k-ième ligne de LU.
- 6. Écrire l'expression de L_k en identifiant la k-ième colonne de A avec la k-ième colonne de LU.
- 7. Écrire l'algorithme de Doolittle.

Exercice 4 : calcul de A^{-1} via la factorisation LU

- 1. Comment calculer l'inverse d'une matrice inversible A de taille n à partir de sa factorisation LU?
- 2. Sachant que la factorisation LU coûte autour $\frac{2}{3}n^3$ opérations arithmétiques, l'algorithme de descente et remontée n^2 opérations, combien coûte le calcul de A^{-1} en opérations arithmétiques?
- 3. Question annexe (si le temps le permet) : calculer le nombre de multiplications dans l'algorithme de Doolittle.

NB : En utilisant les formules de Kramer, le coût en opérations de calcul de A^{-1} serait en O(n!). Rem : $70! > 10^{100}$, gloups!

Exercice 5 : matrice triangulaire supérieure bidiagonale

Soit U une matrice triangulaire supérieure dont seules la diagonale principale et la première diagonale supérieure sont non nulles. Quel est le coût en opérations de résolution du système linéaire

$$Ax = b$$
?