MT09 A24 - Feuille de TD n° 2
Factorisation LU, système triangulaire, calcul de A^{-1}

Exercice 1 : coût de résolution d'un système triangulaire

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ et $U = (u_{ij})_{i,j}$ une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire $u_{i,j} = 0$ pour tout i, $i > j$, quel que soit $j \leq n-1$. On souhaite résoudre le système linéaire $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

1. Écrire l'algorithme de résolution du système linéaire.
2. L'inconnue x_i, $i \leq n-1$ se calcule donc comme
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right).$$
Combien y a-t-il d'additions, multiplications et divisions à i donné ? Rappel : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Combien y a-t-il d'additions et de multiplications au total pour résoudre $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?
4. Vérifiez que x_i peut aussi s'écrire
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}(b_i - \boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{x})$$
pour un certain vecteur $\boldsymbol{w}_i \in \mathbb{R}^n$ à déterminer.

Exercice 2 : pivots de Gauss et factorisation LU

Soit la matrice A et le vecteur $\boldsymbol{b}$ définis par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (solution $\boldsymbol{x} = (-1, 0, 1, 0)^T$).
2. Donner la factorisation LU de A et calculer $\det(A)$ (**on peut résoudre cette question conjointement avec la première**).

Exercice 3 : algorithme de Doolittle

Soit A une matrice d'ordre n admettant une factorisation LU. En se souvenant que les matrices L et U sont triangulaires et que les termes diagonaux de L valent 1 :

1. Écrire l'expression de $\underline{\boldsymbol{U}}_1$ en identifiant la première ligne de A avec la première ligne de LU.

2. Écrire l'expression de $\boldsymbol{L}_1$ en identifiant la première colonne de A avec la première colonne de LU.
3. Écrire l'expression de $\underline{\boldsymbol{U}}_2$ en identifiant la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU.
4. Écrire l'expression de $\boldsymbol{L}_2$ en identifiant la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU.
5. Soit k, $2 \leq k \leq n$ quelconque. Écrire l'expression de $\underline{\boldsymbol{U}}_k$ en identifiant la k-ième ligne de A avec la k-ième ligne de LU.
6. Écrire l'expression de $\boldsymbol{L}_k$ en identifiant la k-ième colonne de A avec la k-ième colonne de LU.
7. Écrire l'algorithme de Doolittle.

Exercice 4 : calcul de A^{-1} via la factorisation LU

1. Comment calculer l'inverse d'une matrice inversible A de taille n à partir de sa factorisation LU ?
2. Sachant que la factorisation LU coûte autour $\frac{2}{3}n^3$ opérations arithmétiques, l'algorithme de descente ou remontée n^2 opérations, combien coûte le calcul de A^{-1} en opérations arithmétiques ?
3. Question annexe (si le temps le permet) : calculer le nombre de multiplications dans l'algorithme de Doolittle.

NB : En utilisant les formules de Kramer, le coût en opérations de calcul de A^{-1} serait en $O(n!)$! !

Exercice 5 : matrice triangulaire supérieure bidiagonale

Soit U une matrice triangulaire supérieure dont seules la diagonale principale et la première diagonale supérieure sont non nulles. Quel est le coût en opérations de résolution du système linéaire

$$Ax = b \text{ ?}$$