MT09 A24 - Feuille de TD n° 3
Matrice à diagonale strictement dominante, factorisation de Choleski BB^T, factorisation LDL^T

Exercice 1 : Matrice à diagonale strictement dominante

Dans de nombreux problèmes de physique, mécanique, chimie ou mathématiques, on a à minimiser une fonction de potentiel d'énergie. On considère un système de n 'particules' en interaction soumis à une force $\boldsymbol{f}$. Pour la recherche de l'équilibre, on a à minimiser une énergie quadratique $V(x_1, ..., x_n)$ définie par

$$V(x_1, ..., x_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} x_i fi$$

où $\alpha > 0$. Le premier terme représente une énergie, le deuxième une énergie d'interaction entre particules voisines et le troisième le travail de la force $\boldsymbol{f}$.

1. La recherche du minimum revient à résoudre les conditions de point critique
$$\nabla V(x_1, ..., x_n) = \mathbf{0}.$$
Montrer que ce système d'équations s'écrit aussi sous la forme
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
où l'on déterminera A et $\boldsymbol{b}$.
2. Une matrice A est dire à *diagonale strictement dominante* (DSD) si elle possède la propriété
$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq n.$$
Vérifiez que la matrice de la question 1 est à DSD (NB : merci α !).
3. Soit A à DSD et $\boldsymbol{x}$ une solution de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Soit $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que
$$|x_{i_0}| \geq |x_i| \quad \forall i,\ 1 \leq i \leq n.$$
En écrivant la ligne i_0 de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, montrer que $x_{i_0} = 0$. En déduire que A est inversible. Qu'en est-il des sous-matrices principales de A ?
4. En déduire de A admet une factorisation LU sans permutation de lignes ou de colonnes.

Exercice 2. Factorisations de Choleski et LDL^T

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Au moyen de la trace et du déterminant de A, calculer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle sdp ?
2. Calculer la factorisation de Choleski de A : $A = BB^T$. Pour cela, on identifiera A avec BB^T où
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$
3. En déduire la factorisation LDL^T de A où L est triangulaire inférieure avec une diagonale constituée de 1, et D est une matrice diagonale. Les éléments diagonaux de D sont-ils les valeurs propres de A ?

Exercice 3. Choleski en dimension n

Soit A une matrice sdp de taille n. Elle admet donc une factorisation de Choleski

$$A = BB^T$$

où B est triangulaire inférieure constituée d'éléments diagonaux b_{ii} strictement positifs.

1. Par identification, calculez b_{11}, puis B_1.
2. Toujours par identification, donner l'expression de b_{22}, puis calculer B_2.

Exercice 4. Application : projection orthogonale sur un s.e.v.

Soit $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ et $W = \text{vect}(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque, on souhaite caractériser la projection orthogonale $\pi\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{x}$ sur W. Puisque $\pi\boldsymbol{x} \in W$, $\pi\boldsymbol{x}$ s'écrit

$$\pi\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Par projection orthogonale, on a aussi

$$\langle \pi\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

1. Écrire le système linéaire satisfait par $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$:
$$S\alpha = \boldsymbol{b}$$
où l'on précisera la matrice S et le second membre $\boldsymbol{b}$. Que se passe-t-il si $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_2$ sont orthogonaux ?
2. Montrez que $S = C^T C$ avec $C = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2] \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.
3. En déduire que S est sdp et peut s'écrire
$$S = BB^T$$
avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs.