# TD MT12

## Chapitre 2

**Exercice 1.**

(1) Soit $f$ une fonction $a$-périodique et continue par morceaux. Montrer que

$$\int_{\alpha}^{a+\alpha} f(x)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(2) Soit $f$ une fonction $a$-périodique et continue par morceaux. Montrer que
— si $f$ est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$,
— si $f$ est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 2.**

(1) Calculer les sommes partielles d'ordre $N \geq 1$, notées $f_N$, des séries de Fourier des fonctions suivantes :
  (a) $f$ est 2-périodique avec $f(x) = |x|$ si $|x| \leq 1$,
  (b) $f$ est 1-périodique avec $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$,
  (c) $f$ est $2\pi$-périodique avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ si $x \in [-\pi, \pi]$,
  (d) $f(x) = |\sin(x)|$ (période de $f$ ?),
  (e) $f(x) = \sin^3(x)$ (période de $f$ ?).

(2) Déduire l'égalité de Parseval satisfaite par les différentes fonctions $f$. En utilisant les fonctions des questions (1)(b) et (1)(c), en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**Exercice 3.**

(1) Soit $f$ une fonction $a$-périodique et continue par morceaux. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et soit $g$ la fonction $a$-périodique avec $g(x) = f(x - \alpha)$. Quelle relation existe entre $c_n(g)$ et $c_n(f)$ ?

(2) En déduire l'expression de la somme partielle d'ordre $N \geq 1$ de la série de Fourier de $h(x) = |\cos(x)|$.

*Date*: 16 septembre 2025.

(3) Soit $f$ une fonction $a$-périodique de classe $C^1$. Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a} c_n(f).$$

En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On suppose à présent $f$ de classe $C^2$. Monter l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|$ si $f$ est $C^2$ ?

**Exercice 4 (Développement en série de cosinus et sinus)** Soit $f$ la définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = x \quad \forall x \in ]0,1[.$$

(1) Prolongez la fonction $f$ sur $]-1,1[$ par imparité, puis prolongez $f$ sur $\mathbb{R}$ par 2 périodicité. On note $f_1$ la prolongation de $f$ sur $\mathbb{R}$. Représentez le graphe de $f_1$. Développer en séries de Fourier $f_1$

(2) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 2. Que constatez-vous ?

**Exercice 5.** Soient $\beta$ un paramètre réel strictement positif donné et $f$ une fonction périodique définie par

$$f(x) = e^{\beta e^{ix}}.$$

(1) Préciser la période de $f$ ? En admettant que $c_0(f) = 1$, montrer que

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \dfrac{\beta^n}{n!} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

(2) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\beta \cos(x)}\, dx = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2n}}{(n!)^2}.$$

**Exercice 6.**

(1) Étudier la convergence des séries :

$$\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right), \quad \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi \cos^2(n)}{n^3}.$$

(2) Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies sur $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \quad \text{sur } I = [0,1] \text{ et } I = [1,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{sur } I = [0,2].$$

**Indication.** Il suffit de fixer $x \in I$ et d'étudier la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(3) les suites de fonctions précédentes convergent elles uniformément sur $I$ ?

**Exercice 7.** On considère les fonctions de l'exercice 2 question (1). Les séries de Fourier de ces fonctions convergent elles simplement vers $f$ sur $\mathbb{R}$ ? Si oui pourquoi ? Si ce n'est pas le cas préciser vers quelle valeur tend $(f_N(x))_{N\geq 1}$. Enfin quelles fonctions convergent normalement sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 8.** Développer en séries de Fourier la fonction $f$ de période 2, définie sur $[-1,1[$ par

$$f(x) = \cos(\pi z x) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En déduire les égalités :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

**Exercice 9 (Exercice de synthèse 1).** Soit $f$ la fonction 2-périodique avec

$$f(x) = x(1-x), \quad \forall x \in [0,1],$$

que l'on prolonge par imparité sur $[-1,0]$.

(1) Représenter le graphe de $f$.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Justifier que la suite des sommes partielles de $f$, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

(4) Justifier la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(5) Justifier que la série de Fourier de $f$ converge normalement vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 10 (Exercice de synthèse 2).** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique et impaire avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0,\pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \pi. \end{cases}$$

(1) Représenter le graphe de $f$.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Justifier que la suite des sommes partielles de $f$, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers $f$ sur $\mathbb{R}$.

(4) Y-a-t-il convergence uniforme des séries de Fourier vers $f$ ?

**L'objective de ces exercices est d'appliquer les séries de Fourier afin de résoudre une équation différentielle et l'équation de la chaleur sur domaine borné.**

**Exercice 11.** En utilisant les séries de Fourier et l'exercice 2 déterminer une solution particulière et $\pi$-périodique de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = |\sin(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 12. (Équation de la chaleur)** On s'intéresse ici à l'équation de la chaleur sur l'intervalle spatial $[0, L]$ ($L > 0$) et on cherche $u$ solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in (0, L),\ t > 0, \tag{1}$$

où $D > 0$ désigne la constante de diffusion. On ajoute des conditions aux limites

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{2}$$

et des conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{3}$$

L'équation (1) modélise l'évolution de la température $u$ au sein du domaine $[0, L]$ au cours du temps. Dans le système précédent on suppose que la température est maintenue à 0 aux extrémités du domaine spatial $[0, L]$.

(1) Dans un premier temps, on ne tient pas compte de la condition initiale. Recherchez une solution à variables séparées, i.e., de la forme

$$u(x,t) = f(x)\varphi(t),$$

avec $f(0) = f(L) = 0$. Ceci conduit notamment à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$-f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{ avec } f(0) = f(L) = 0,$$

qui n'admet des solutions non nulles que pour certaines valeurs de $\lambda$ que l'on précisera (indication : on distinguera les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$).

(2) On tient maintenant compte de la donnée initiale (3). On suppose que $u_0$ est un polynôme trigonométrique de période $a = 2L$ de la forme :

$$u_0(x) = u_0^N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Par un principe de superposition, montrez que la solution du problème de la chaleur est donnée par

$$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \; \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En fait si on suppose que $u_0$ est de classe $C^3$ sur $[0,L]$ et prolongeable en une fonction de classe $C^2$ par imparité et périodisation de période $a = 2L$. On peut montrer que le problème (1)-(3) admet une solution et une seule qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \; \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

où les $b_n$ sont les coefficients de Fourier du prolongement de $u_0$.