TD MT12

Chapitre 2

Exercice 1.

(1) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Montrer que
$$\int_{\alpha}^{a+\alpha} f(x)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(2) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Montrer que
— si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$,
— si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

(1) Calculer les sommes partielles d'ordre $N \geq 1$, notées f_N, des séries de Fourier des fonctions suivantes :
  (a) f est 2-périodique avec $f(x) = |x|$ si $|x| \leq 1$,
  (b) f est 1-périodique avec $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$,
  (c) f est 2π-périodique avec $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ si $x \in [-\pi, \pi]$,
  (d) $f(x) = |\sin(x)|$ (période de f ?),
  (e) $f(x) = \sin^3(x)$ (période de f ?).

(2) Déduire l'égalité de Parseval satisfaite par les différentes fonctions f. En utilisant les fonctions des questions (1)(b) et (1)(c), en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3.

(1) Soit f une fonction a-périodique et continue par morceaux. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et soit g la fonction a-périodique avec $g(x) = f(x - \alpha)$. Quelle relation existe entre $c_n(g)$ et $c_n(f)$?

(2) En déduire l'expression de la somme partielle d'ordre $N \geq 1$ de la série de Fourier de $h(x) = |\cos(x)|$.

Date: 11 novembre 2024.

(3) Soit f une fonction a-périodique de classe C^1. Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a}\, c_n(f).$$

En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

On suppose à présent f de classe C^2. Monter l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$|c_n(f)| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|$ si f est C^2 ?

Exercice 4 (Développement en série de cosinus et sinus) Soit f la définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = x \quad \forall x \in]0,1[.$$

(1) Prolongez la fonction f sur $]-1,1[$ par imparité, puis prolongez f sur $\mathbb{R}$ par 2 périodicité. On note f_1 la prolongation de f sur $\mathbb{R}$. Représentez le graphe de f_1. Développer en séries de Fourier f_1

(2) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 2. Que constatez-vous ?

Exercice 5. Soient β un paramètre réel strictement positif donné et f une fonction périodique définie par

$$f(x) = e^{\beta e^{ix}}.$$

(1) Préciser la période de f ? En admettant que $c_0(f) = 1$, montrer que

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ \dfrac{\beta^n}{n!} & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

(2) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\beta\cos(x)}\, dx = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta^{2n}}{(n!)^2}.$$

Exercice 6.

(1) Étudier la convergence des séries :

$$\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{n^2}{n^2+n+1}\right), \quad \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{\pi\cos^2(n)}{n^3}.$$

(2) Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies sur I un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \quad \text{sur } I = [0,1] \text{ et } I = [1,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{sur } I = [0,2].$$

Indication. Il suffit de fixer $x \in I$ et d'étudier la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(3) les suites de fonctions précédentes convergent elles uniformément sur I ?

Exercice 7. On considère les fonctions de l'exercice 2 question (1). Les séries de Fourier de ces fonctions convergent elles simplement vers f sur $\mathbb{R}$? Si oui pourquoi ? Si ce n'est pas le cas préciser vers quelle valeur tend $(f_N(x))_{N\geq 1}$. Enfin quelles fonctions convergent normalement sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Développer en séries de Fourier la fonction f de période 2, définie sur $[-1,1[$ par

$$f(x) = \cos(\pi z x) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

En déduire les égalités :

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 9 (Exercice de synthèse 1). Soit f la fonction 2-périodique avec

$$f(x) = x(1-x), \quad \forall x \in [0,1],$$

que l'on prolonge par imparité sur $[-1,0]$.

(1) Représenter le graphe de f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Justifier que la suite des sommes partielles de f, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur $\mathbb{R}$.

(4) Justifier la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(5) Justifier que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (Exercice de synthèse 2). Soit f la fonction 2π-périodique et impaire avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \pi. \end{cases}$$

(1) Représenter le graphe de f.

(2) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

(3) Justifier que la suite des sommes partielles de f, notée $(f_N)_{N\geq 1}$, converge ponctuellement (ou simplement) vers f sur $\mathbb{R}$.

(4) Y-a-t-il convergence uniforme des séries de Fourier vers f ?

L'objective de ces exercices est d'appliquer les séries de Fourier afin de résoudre une équation différentielle et l'équation de la chaleur sur domaine borné.

Exercice 11. En utilisant les séries de Fourier et l'exercice 2 déterminer une solution particulière et π-périodique de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = |\sin(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. (Équation de la chaleur) On s'intéresse ici à l'équation de la chaleur sur l'intervalle spatial $[0, L]$ ($L > 0$) et on cherche u solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0, \tag{1}$$

où $D > 0$ désigne la constante de diffusion. On ajoute des conditions aux limites

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{2}$$

et des conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

L'équation (1) modélise l'évolution de la température u au sein du domaine $[0, L]$ au cours du temps. Dans le système précédent on suppose que la température est maintenue à 0 aux extrémités du domaine spatial $[0, L]$.

(1) Dans un premier temps, on ne tient pas compte de la condition initiale. Recherchez une solution à variables séparées, i.e., de la forme

$$u(x,t) = f(x)\varphi(t),$$

avec $f(0) = f(L) = 0$. Ceci conduit notamment à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$-f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{avec } f(0) = f(L) = 0,$$

qui n'admet des solutions non nulles que pour certaines valeurs de λ que l'on précisera (indication : on distinguera les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$).

(2) On tient maintenant compte de la donnée initiale (3). On suppose que u_0 est un polynôme trigonométrique de période $a = 2L$ de la forme :

$$u_0(x) = u_0^N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Par un principe de superposition, montrez que la solution du problème de la chaleur est donnée par

$$u^N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

En fait si on suppose que u_0 est de classe C^3 sur $[0, L]$ et prolongeable en une fonction de classe C^2 par imparité et périodisation de période $a = 2L$. On peut montrer que le problème (1)-(3) admet une solution et une seule qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt} \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

où les b_n sont les coefficients de Fourier du prolongement de u_0.