MT09 A26 - Feuille de TD n°4
Quotient de Rayleigh, normes matricielles subordonnées, conditionnement

On rappelle l'expression des normes vectorielles usuelles pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle la définition de la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_v$ dans $\mathbb{C}^n$:

$$\|A\|_v = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,\, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}$$

et pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'expression des normes matricielles subordonnées usuelles vues en cours :

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A^T\|_\infty, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice B. On rappelle aussi l'expression de la norme matricielle (non subordonnée) de Frobenius $\|.\|_F$ de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}.$$

Exercice 1 : normes matricielles subordonnées (NMS)

Soit les matrices A et D définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 36 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de A ? (solution : -2, 1, 10).
2. Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_F$. Rem : on trouverait aussi que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \approx 36.67$.
3. Calculer le produit $\|D\|_\infty \,.\, \|D^{-1}\|_\infty$ et comparer à $\|I_2\|_\infty$.

Exercice 2 : quotient de Rayleigh

Soit S une matrice symétrique. On sait que S est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de S ordonnées de manière croissante. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, on définit le quotient de Rayleigh $R_S(\boldsymbol{x})$ comme

$$R_S(\boldsymbol{x}) = \frac{\langle S\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

1. Montrer que

$$\lambda_1 \leq R_S(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_n \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}.$$

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, montrez que

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \leq \rho(A^T A).$$

En déduire que

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^T A)}$$

(il y a donc même égalité d'après le cours).

Exercice 3 : propriétés des NMS

1. Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   — $\|I\| = 1$;
   — pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible,

$$\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1};$$

   — on a toujours $\rho(A) \leq \|A\|$.
2. Soit P une matrice orthogonale et $\|.\|_2$ la NMS à la norme vectorielle euclidienne. Montrer que

$$\|P\|_2 = 1.$$

Exercice 4 : conditionnement de matrice

Soit A une matrice inversible. Pour $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ sont les solutions des systèmes linéaires respectifs

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b},$$

on a toujours l'inégalité (voir cours) :

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \mathrm{cond}_{\|.\|}(A)\ \frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{1}$$

où

$$\mathrm{cond}_{\|.\|}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A relativement à la norme vectorielle $\|.\|$. L'inégalité est optimale au sens où il y a des cas d'égalité (la borne peut donc être atteinte). Soit ε un réel strictement positif "assez petit" ($\varepsilon \ll 1$). On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $\det(A)$. Calculez A^{-1}. Calculez $\mathrm{cond}_{\|.\|_\infty}(A)$.
2. Soit $\boldsymbol{b} = (\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}})^T$. Vérifiez que $\boldsymbol{x} = (1,1)^T$ est solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
3. Soit $\delta\boldsymbol{b} = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})^T$. Que vaut

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} \ ?$$

4. Soit $\delta\boldsymbol{x}$ tel que $A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$. Déterminer $\delta\boldsymbol{x}$ (solution : $\delta\boldsymbol{x} = (-2,\ 2-\varepsilon)^T$). Que vaut $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$? Est-ce compatible avec l'inégalité (1) ? Commentez le résultat selon ε.

Exercice 5

Montrez que $\|A\|_M = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ n'est pas une norme matricielle.