# MT09 P24 - Feuille de TD n° 4
# Quotient de Rayleigh, normes matricielles subordonnées, conditionnement

Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle la définition de la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_v$ dans $\mathbb{C}^n$ :

$$\|A\| = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n,\, \boldsymbol{x}\neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v}.$$

et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'expression des normes matricielles subordonnées usuelles vues en cours :

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A^T\|_\infty, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

où $\rho(B)$ désigne le rayon spectral de la matrice $B$.

## Exercice 1 : normes matricielles subordonnées (NMS)

Soit les matrices $A$ et $D$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 36 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de $A$ ? (solution : -2, 1, 10).
2. Calculer $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_F$. Rem : on trouverait aussi que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} \approx 36.67$.
3. Calculer le produit $\|D\|_\infty \, \|D^{-1}\|_\infty$.

## Exercice 2 : quotient de Rayleigh

Soit $S$ une matrice symétrique. On sait que $S$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $S$ organisées de manière croissante. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, on définit le quotient de Rayleigh $R_S(\boldsymbol{x})$ comme

$$R_S(\boldsymbol{x}) = \frac{\langle S\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}.$$

1. Montrer que
$$\lambda_1 \leq R_S(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_n \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}.$$
2. Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. Pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, montrez que
$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \leq \rho(A^TA).$$
En déduire que
$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho(A^TA)}$$
(il y a donc même égalité d'après le cours).

## Exercice 3 : propriétés des NMS

1. Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   — $\|I\| = 1$ ;
   — pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible,
   $$\|A\| \, \|A^{-1}\| \geq 1 \ ;$$
   — on a toujours $\rho(A) \leq \|A\|$.
2. Soit $P$ une matrice orthogonale et $\|.\|$ la NMS à la norme euclidienne. Montrer que
   $$\|P\|_2 = 1.$$

## Exercice 4 : conditionnement de matrice

Soit $A$ une matrice inversible. Pour $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ sont les solutions,des systèmes linéaires respectifs
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b},$$
on a toujours l'inégalité (voir cours) :
$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \mathrm{cond}_{\|.\|}(A) \, \frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}. \tag{1}$$
où
$$\mathrm{cond}_{\|.\|}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$
s'appelle le conditionnement de la matrice $A$ relativement à la norme vectorielle $\|.\|$. L'inégalité est optimale au sens où il y a des cas d'égalité. Soit $\varepsilon$ un réel positif "assez petit" ($\varepsilon \ll 1$). On considère la matrice $A$ définie par
$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $\det(A)$. Calculez $A^{-1}$. Calculez $\mathrm{cond}_{\|.\|_\infty}(A)$
2. Soit $\boldsymbol{b} = (\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}})^T$. Vérifiez que $\boldsymbol{x} = (1, 1)^T$ est solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
3. Soit $\delta\boldsymbol{b} = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})^T$. Que vaut
   $$\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} \ ?$$
4. Soit $\delta\boldsymbol{x}$ tel que $A(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$. Déterminer $\delta\boldsymbol{x}$ (solution : $\delta\boldsymbol{x} = (-2, 2-\varepsilon)^T$). Que vaut $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$ ? Est-ce compatible avec l'inégalité (1) ?

Commentaire : pas top, non ? On a $\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = 2 = O(1)$ indépendant de $\varepsilon$ tandis que $\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = O(\varepsilon)$. Quel que soit $\varepsilon$, on a une perturbation sur la solution en $O(1)$ pour une perturbation sur les données en $O(\varepsilon)$. Quand le cas de figure se présente en pratique, on dit que le problème est mal conditionné. Si l'on commet une erreur de mesure sur les données, on fausse totalement le résultat attendu. Et on n'a pas parlé des erreurs d'arrondis dues aux nombres flottants ...