### MT09 A25 - Feuille de TD n°4

# Quotient de Rayleigh, normes matricielles subordonnées, conditionnement

On rappelle l'expression des normes vectorielles usuelles pour  ${\pmb x} \in {\mathbb R}^n$  :

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty} = \max_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on rappelle la définition de la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle  $\|.\|_v$  dans  $\mathbb{C}^n$ :

$$||A||_v = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_v}{||\boldsymbol{x}||_v}$$

et pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'expression des normes matricielles subordonnées usuelles vues en cours :

$$||A||_{\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_{1} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = ||A^{T}||_{\infty}, \quad ||A||_{2} = \sqrt{\rho(A^{T}A)}$$

où  $\rho(B)$  désigne le rayon spectral de la matrice B. On rappelle aussi l'expression de la norme matricielle (non subordonnée) de Frobenius  $\|.\|_F$  de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2}.$$

## Exercice 1 : normes matricielles subordonnées (NMS)

Soit les matrices A et D définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 36 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1. Quelles sont les valeurs propres de A? (solution : -2, 1, 10).
- 2. Calculer  $||A||_1$ ,  $||A||_{\infty}$  et  $||A||_F$ . Rem : on trouverait aussi que  $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} \approx 36.67$ .
- 3. Calculer le produit  $||D||_{\infty}$ .  $||D^{-1}||_{\infty}$  et comparer à  $||I_2||_{\infty}$ .

### Exercice 2 : quotient de Rayleigh

Soit S une matrice symétrique. On sait que S est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de S ordonnées de manière croissante. Pour  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , on définit le quotient de Rayleigh  $R_S(\boldsymbol{x})$  comme

$$R_S(\boldsymbol{x}) = \frac{\langle S\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}.$$

1. Montrer que

$$\lambda_1 \leq R_S(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_n \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , montrez que

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \le \rho(A^T A).$$

En déduire que

$$||A||_2 \le \sqrt{\rho(A^T A)}$$

(il y a donc même égalité d'après le cours).

### Exercice 3 : propriétés des NMS

- 1. Soit  $\|.\|$  une norme matricielle subordonnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :
  - -- ||I|| = 1;
  - pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible,

$$||A|| ||A^{-1}|| \ge 1$$
;

- on a toujours  $\rho(A) \leq ||A||$ .
- 2. Soit P une matrice orthogonale et  $\|.\|$  la NMS à la norme euclidienne. Montrer que

$$||P||_2 = 1.$$

#### Exercice 4 : conditionnement de matrice

Soit A une matrice inversible. Pour  $b \neq 0$ , si x et  $x + \delta x$  sont les solutions des systèmes linéaires respectifs

$$Ax = b$$
,  $A(x + \delta x) = b + \delta b$ ,

on a toujours l'inégalité (voir cours) :

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \operatorname{cond}_{\|.\|}(A) \frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \tag{1}$$

οù

$$\operatorname{cond}_{\|.\|}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A relativement à la norme vectorielle  $\|.\|$ . L'inégalité est optimale au sens où il y a des cas d'égalité (la borne peut donc être atteinte). Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif "assez petit" ( $\varepsilon \ll 1$ ). On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1. Calculez  $\det(A)$ . Calculez  $A^{-1}$ . Calculez  $\operatorname{cond}_{\|.\|_{\infty}}(A)$ .
- 2. Soit  $\boldsymbol{b}=(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{2-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}})^T$ . Vérifiez que  $\boldsymbol{x}=(1,1)^T$  est solution de  $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ .
- 3. Soit  $\delta \boldsymbol{b} = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})^T$ . Que vaut

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|_{\infty}}{\|\boldsymbol{b}\|_{\infty}}$$
?

4. Soit  $\delta \boldsymbol{x}$  tel que  $A(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$ . Déterminer  $\delta \boldsymbol{x}$  (solution :  $\delta \boldsymbol{x} = (-2, 2 - \varepsilon)^T$ ). Que vaut  $\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|_{\infty}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}}$ ? Est-ce compatible avec l'inégalité (1)? Commentez le résultat selon  $\varepsilon$ .

#### Exercice 5

Montrez que  $||A||_M = \max_{1 \le i, j \le n} |a_{ij}|$  n'est pas une norme matricielle.