MT09 P24 - Feuille de TD n° 5
Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Exercice 1 : méthode de Jacobi sur matrice triangulaire

À des fins purement d'exercice, on étudie le comportement de la méthode de Jacobi sur un système triangulaire simple. Soit A une matrice constituée d'éléments diagonaux a_{ii} non nuls, le reste des coefficients étant nuls sauf a_{1n}. On souhaite résoudre le système linéaire

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

On note D la matrice diagonale constituée des a_{ii} et F la matrice d'unique élément non nul $f_{1n} = -a_{1n}$. La matrice A s'écrit $A = D - F$.

1. Résoudre directement le système linéaire pour déterminer sa solution $\bar{\boldsymbol{x}}$.
2. Écrire la méthode de Jacobi (on notera $\boldsymbol{x}^{(0)}$ le vecteur d'initialisation).
3. Écrire la première itération de la méthode de Jacobi et déterminer $\boldsymbol{x}^{(1)}$. Montrer qu'on commet en général une erreur entre $\boldsymbol{x}^{(1)}$ et $\bar{\boldsymbol{x}}$.
4. Montrer que (dans ce cas) la méthode de Jacobi converge toujours en au plus 2 itérations.
5. Calculer $\|D^{-1}F\|_\infty$ et $\rho(D^{-1}F)$
6. Vérifiez que
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \bar{\boldsymbol{x}} = D^{-1}F\,(\boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}})$$
et qu'en particulier
$$\boldsymbol{x}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{x}} = (D^{-1}F)^2\,(\boldsymbol{x}^{(0)} - \bar{\boldsymbol{x}}).$$
Quelle propriété a la matrice $D^{-1}F$?

Commentaire : si $|a_{1n}| > |a_{11}|$ on a $\|D^{-1}F\|_\infty > 1$ et pourtant la méthode de Jacobi converge. Ceci montre bien que la condition $\|D^{-1}F\| < 1$ n'est pas une condition nécessaire de convergence. La condition $\rho(D^{-1}F) < 1$ est par contre une condition nécessaire (et suffisante) de convergence.

Exercice 2 : méthode de Jacobi

1. Écrire la méthode de Jacobi pour un système linéaire quelconque $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (on considérera les notations du cours $A = D - E - F$).
2. Quels sont les éléments de la i-ème ligne de $C = D^{-1}(E + F)$?
3. En conclure que la méthode de Jacobi est convergente si la matrice A est à diagonale strictement dominante (DSD).

Exercice 3 : convergence et vitesse de convergence

Soit la méthode itérative
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = C\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d},$$
avec $\boldsymbol{x}^{(0)}$ donné. On suppose qu'il existe $\bar{\boldsymbol{x}}$ tel que $\bar{\boldsymbol{x}} = C\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}$.

1. On suppose que C est diagonalisable dans $\mathbb{R}$: il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale Λ tels que $C = P\Lambda P^{-1}$. On note
$$\boldsymbol{e}^{(k)} = P^{-1}(\boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}}).$$
Écrire la relation entre $\boldsymbol{e}^{(k)}$ et $\boldsymbol{e}^{(k+1)}$.
2. On suppose que $\rho(C) = 1$: $\exists i_0 \in \{1, ..., n\}/\ |\lambda_{i_0}| = 1$ et $|\lambda_i| \leq 1\ \forall i$. On suppose que $\boldsymbol{x}^{(0)}$ est tel que $|(\boldsymbol{e}^{(0)})_{i_0}| \neq 0$ Que se passe-t-il ?
3. On suppose que $\rho(C) = 1 - \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est petit. Comment se comporte alors la suite ?

Exercice 4 : décomposition originale

On considère la matrice symétrique suivante
$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1),$$
c'est-à-dire la matrice constituée de coefficients '2' sur la diagonale et de '-1' sur les deux sous-diagonales principales.

1. En calculant la forme quadratique $q(\boldsymbol{x})$ associée à A, montrez que la matrice A est définie positive, notamment inversible.
2. On peut décomposer A comme
$$A = L + L^T$$
avec
$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
3. On considère la méthode itérative
$$L\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -L^T\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$
4. Calculez L^{-1} et $C = -L^{-1}L^T$.
5. Que vaut $\|C\|_\infty$? Peut-on conclure sur la convergence de la méthode ?

Commentaire : on peut montrer que $\rho(C) < 1$ quelle que soit la taille de A mais que $\rho(C)$ s'approche très vite de 1 quand la taille de la matrice devient grande, ce qui induit une convergence très lente. Sinon, on peut prouver que pour une matrice sdp, la méthode de Gauss-Seidel converge toujours.