# MT09 A25 - Feuille de TD n° 5 Méthodes de point fixe, méthode de Newton

### Exercice 1 : méthode de point fixe

On considère la suite

$$x_0 \in [-1,1], \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

avec  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}$ .

- 1. Montrer que  $g([-1,1]) \subset [-1,1]$ .
- 2. Montrer que  $|g'(x)| \le \frac{2}{3} \sup [-1, 1]$ .
- 3. Montrer que la suite  $x_n$  converge vers un unique  $x_* \in [-1, 1]$ . Que vaut  $x_*$ ?
- 4. Montrez que

$$x_{n+1} - x_{\star} = \xi_n \left( x_n - x_{\star} \right)$$

où l'on précisera l'expression de  $\xi_n$  en fonction de  $x_n$  et  $x_{\star}$ . Vérifiez que  $|\xi_n| \leq \frac{2}{3}$  et que l'on a

$$|x_n - x_\star| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_0 - x_\star).$$

5. Montrer que

$$|x_n - x_\star| \le \frac{(2/3)^n}{(1 - 2/3)} |x_1 - x_0|.$$

6. Tenant compte de la dernière inégalité, en considérant  $x_0 = 0$ , combien faut-il au moins d'itérations pour atteindre

$$|x_n - x_{\star}| < 10^{-15}$$
 ?

## Exercice 2 : division sans division par méthode de Newton

Cet exercice explique comment une 'division' est effectuée dans un microprocesseur. Soit  $a \in ]1,2[$ . On souhaite calculer (approcher) l'inverse de a sans division. On introduit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.$$

- 1. Appliquez la méthode de Newton à f et montrez que l'on peut s'arranger pour ne faire que des opérations d'addition et de multiplication.
- 2. Montrer que la méthode de Newton est équivalente à la méthode de point fixe

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

1

où l'on précisera g. Montrer que pour  $a \in ]1,2[$  et  $x \in [\frac{1}{2},1],$  on a |g'(x)| < 1.

3. A-t-on toujours  $g([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$ ? (indication : que vaut g(1)?). Conclusion?

4. Montrez que

$$a\left(x_{n+1} - \frac{1}{a}\right) = -\left[a\left(x_n - \frac{1}{a}\right)\right]^2.$$

- 5. On note  $e_n = a\left(x_n \frac{1}{a}\right)$ , on a donc  $e_{n+1} = -e_n^2$ . Que vaut  $e_n$  pour tout n? Sous quelle condition la suite  $(e_n)_n$  converge? Que suggérez-vous comme choix de valeur  $x_0$ ?
- 6. Soit  $\varepsilon_{tol}=2^{-52}\approx 2.22\,10^{-16}$  (précision numérique pour des flottants DP, c'est-à-dire les float64, voir le chapitre 1). Trouvez le nombre d'itérations n minimal qui garantit que

$$|e_n| < \varepsilon_{tol}$$
.

7. Comptez le nombre total d'opérations arithmétiques pour atteindre la précision attendue. Commentaire : on voit qu'une opération de 'division' en ce sens demande beaucoup d'opérations  $(+, \times)$ ! Une division est donc coûteuse. Dans les programmes scientifiques, on essaie d'éviter un trop grand nombre de divisions (quand cela est possible).

#### Exercice 3: contraction locale

Soit  $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$  et soit  $x_{\star} \in ]a,b[$  tel que

$$x_{\star} = g(x_{\star}), \qquad |g'(x_{\star})| < 1.$$

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$g([x_{\star} - \alpha, x_{\star} + \alpha]) \subset [x_{\star} - \alpha, x_{\star} + \alpha],$$

$$\exists \beta < 1/ |g'(x)| \le \beta \quad \forall x \in [x_{\star} - \alpha, x_{\star} + \alpha].$$

Que peut-on en conclure?

### Exercice 4 : vitesse de convergence

Redémontrez que la méthode de Newton converge quadratiquement (quand elle converge).

## Exercice 5 (optionnel) : triangle équilatéral

Soit A(0,0) et B(1,0). On cherche un point C(x,y) tel que

$$||CA||^2 = ||CB||^2 = 1.$$

1. Écrire les contraintes à satisfaire sous la forme d'un système algébrique

$$f(x) = 0$$

avec  $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$  et  $\boldsymbol{f}$  différentiable.

- 2. Résoudre à la main le système d'équations algébriques. A-t-on unicité de la solution?
- 3. Écrire la méthode de Newton-Raphson relative à ce système d'équations.
- 4. Soit  $x^*$  une solution de f(x) = 0. A-t-on

$$D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\star})$$

inversible? Que peut-on en conclure?