# MT09 A25 - Feuille de TD n° 6 Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

## Exercice 1 : méthode de Jacobi sur matrice triangulaire

À des fins purement d'exercice, on étudie le comportement de la méthode de Jacobi sur un système triangulaire simple. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice constituée d'éléments diagonaux  $a_{ii}$  non nuls, le reste des coefficients étant nuls sauf  $a_{1n}$ . On souhaite résoudre le système linéaire

$$Ax = b$$
.

On note D la matrice diagonale constituée des  $a_{ii}$  et F la matrice d'unique élément non nul  $f_{1n} = -a_{1n}$ . La matrice A s'écrit A = D - F.

- 1. Résoudre directement le système linéaire pour déterminer sa solution  $\bar{x}$ .
- 2. Écrire la méthode de Jacobi (on notera  $\boldsymbol{x}^{(0)}$  le vecteur d'initialisation).
- 3. Écrire la première itération de la méthode de Jacobi et déterminer  $x^{(1)}$ . Montrer qu'on commet en général une erreur entre  $x^{(1)}$  et  $\bar{x}$ .
- 4. Montrer que (dans ce cas) la méthode de Jacobi converge toujours en au plus 2 itérations.
- 5. Calculer  $||D^{-1}F||_{\infty}$  et  $\rho(D^{-1}F)$
- 6. Vérifiez que

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \bar{\boldsymbol{x}} = D^{-1} F \left( \boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}} \right)$$

et qu'en particulier

$$\mathbf{x}^{(2)} - \bar{\mathbf{x}} = (D^{-1}F)^2 (\mathbf{x}^{(0)} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Quelle propriété a la matrice  $D^{-1}F$ ?

Commentaire : si  $|a_{1n}| > |a_{11}|$  on a  $||D^{-1}F||_{\infty} > 1$  et pourtant la méthode de Jacobi converge. Ceci montre bien que la condition  $||D^{-1}F|| < 1$  n'est pas une condition nécessaire de convergence. La condition  $\rho(D^{-1}F) < 1$  est par contre une condition nécessaire (et suffisante) de convergence.

#### Exercice 2 : méthode de Jacobi

- 1. Écrire la méthode de Jacobi pour un système linéaire quelconque Ax = b (on considérera les notations du cours A = D E F).
- 2. Quels sont les éléments de la *i*-ème ligne de  $C = D^{-1}(E+F)$ ?
- 3. En conclure que la méthode de Jacobi est convergente si la matrice A est à diagonale strictement dominante (DSD).

## Exercice 3 : convergence et vitesse de convergence

Soit la méthode itérative

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = C\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d},$$

avec  $\boldsymbol{x}^{(0)}$  donné. On suppose qu'il existe  $\bar{\boldsymbol{x}}$  tel que  $\bar{\boldsymbol{x}} = C\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}$ .

1. On suppose que C est diagonalisable dans  $\mathbb R$ : il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale  $\Lambda$  tels que  $C=P\Lambda P^{-1}$ . On note

$$e^{(k)} = P^{-1}(x^{(k)} - \bar{x}).$$

Écrire la relation entre  $e^{(k)}$  et  $e^{(k+1)}$ .

- 2. On suppose que  $\rho(C) = 1$ :  $\exists i_0 \in \{1,...,n\} / |\lambda_{i_0}| = 1$  et  $|\lambda_i| \le 1 \ \forall i$ . On suppose que  $\boldsymbol{x}^{(0)}$  est tel que  $|(\boldsymbol{e}^{(0)})_{i_0}| \ne 0$  Que se passe-t-il?
- 3. On suppose que  $\rho(C) = 1 \varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$  est petit. Comment se comporte alors la suite?

## Exercice 4 : décomposition originale

On considère la matrice tridiagonale suivante

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1),$$

c'est-à-dire la matrice constituée de coefficients '2' sur la diagonale et de '-1' sur les deux sousdiagonales principales.

- 1. En calculant la forme quadratique  $q(\mathbf{x})$  associée à A, montrez que la matrice A est définie positive, notamment inversible.
- 2. On peut décomposer A comme

$$A = L + L^T$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On considère la méthode itérative

$$L\boldsymbol{x}^{(k+1)} = -L^T\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$$

- 4. Calculez  $L^{-1}$  et  $C = -L^{-1}L^T$ .
- 5. Que vaut  $||C||_{\infty}$ ? Peut-on conclure sur la convergence de la méthode?

Commentaire : on peut montrer que  $\rho(C) < 1$  quelle que soit la taille de A mais que  $\rho(C)$  s'approche très vite de 1 quand la taille de la matrice devient grande, ce qui induit une convergence très lente. Sinon, on peut prouver que pour une matrice s.d.p. (incluant ce cas), la méthode de Gauss-Seidel converge toujours.