MT09 P24 - Feuille de TD n° 6
Méthodes de point fixe, methode de Newton

Exercice 1 : Point fixe

On considère la suite

$$x_0 \in [-1, 1], \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

avec $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$.

1. Montrer que $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.
2. Montrer que $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ sur $[-1, 1]$.
3. Montrer que la suite x_n converge vers un unique $x_\star \in [-1, 1]$. Que vaut $x_\star$?
4. Montrez que
$$x_{n+1} - x_\star = \xi_n (x_n - x_\star)$$
où l'on précisera l'expression de ξ_n en fonction de x_n et $x_\star$. Vérifiez que $|\xi_n| \leq \frac{2}{3}$ et que l'on a
$$|x_n - x_\star| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_0 - x_\star).$$
5. Montrer que
$$|x_n - x_\star| \leq \frac{(2/3)^n}{(1 - 2/3)} |x_1 - x_0|.$$
6. Tenant compte de la dernière inégalité, en considérant $x_0 = 0$, combien faut-il au moins d'itérations pour atteindre
$$|x_n - x_\star| < 10^{-15} \text{ ?}$$

Exercice 2 : Division d'un réel par méthode de Newton

Cet exercice explique comment une division est effectuée dans un microprocesseur. Soit $a \in]1, 2[$. On souhaite calculer l'inverse de a sans division. On introduit la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} - a.$$

1. Appliquez la méthode de Newton à f et montrez que l'on peut s'arranger pour ne faire que des opérations d'addition et de multiplication.
2. Montrer que la méthode de Newton est équivalente à la méthode de point fixe
$$x_{n+1} = g(x_n)$$
où l'on précisera g. Montrer que pour $a \in]1, 2[$ et $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a $|g'(x)| < 1$.
3. A-t-on toujours $g([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$? (indication : que vaut $g(1)$?). Conclusion ?

4. Montrez que
$$a\left(x_{n+1} - \frac{1}{a}\right) = -\left[a\left(x_n - \frac{1}{a}\right)\right]^2.$$
5. On note $e_n = a\left(x_n - \frac{1}{a}\right)$, on a donc $e_{n+1} = -e_n^2$. Que vaut e_n pour tout n ? Sous quelle condition la suite $(e_n)_n$ converge ? Que suggérez-vous comme choix de valeur x_0 ?
6. Soit $\varepsilon_{tol} = 2^{-52} \approx 2.22\,10^{-16}$. Trouvez le nombre d'itérations optimal qui garantit que
$$|e_n| < \varepsilon_{tol}.$$
7. Compter le nombre total d'opérations arithmétiques pour atteindre la précision attendue.

Commentaire : on voit qu'une opération de 'division' en ce sens demande beaucoup d'opérations $(+, \times)$! Dans les programmes scientifiques, on essaie d'éviter un trop grand nombre de divisions (quand cela est possible).

Exercice 3 (optionnel) : Triangle équilatéral

Soit $A(0,0)$ et $B(1,0)$. On cherche un point $C(x,y)$ tel que
$$\|CA\| = \|CB\| = 1.$$

1. Écrire les contraintes à satisfaire sous la forme d'un système algébrique
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$
avec $\boldsymbol{x} = (x,y)^T$ et $\boldsymbol{f}$ différentiable.
2. Résoudre à la main le système d'équations algébriques. A-t-on unicité de la solution ?
3. Écrire la méthode de Newton-Raphson relative à ce système d'équations.
4. Soit $\boldsymbol{x}^\star$ une solution de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. A-t-on
$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\star)$$
inversible ? Que peut-on en conclure ?