TD MT12

1. Chapitre 3

Exercice 1.

(1) Soit f une fonction a-périodique continue C^1 par morceaux.

(a) Exprimer $c_n^N(f)$ en fonction de $c_n(f)$, pour $0 \leq n \leq N-1$.

(b) Montrer que si $c_n(f)$ sont des réels positifs (pour $n \in \mathbb{Z}$) alors $c_n^N(f)$ sont aussi des réels positifs.

(c) Montrer que si $c_n(f)$ sont des réels négatifs (pour $n \in \mathbb{Z}$) alors $c_n^N(f)$ sont aussi des réels négatifs.

(2) On considère la fonction f 1-périodique, vérifiant $f(x) = \frac{1}{3}$ pour $x \in [0, \frac{3}{4}[$ et $f(x) = -4$ pour $x \in [\frac{3}{4}, 1[$.

(a) Calculer $c_0(f)$.

(b) Calculer $c_0^2(f)$, $c_0^3(f)$ et $c_0^4(f)$.

(c) Est-il possible de connaître le signe de $c_n(f)$ à partir de celui de $c_n^N(f)$?

Exercice 2. (**Égalité de Plancherel**)

(1) Soient f et g deux fonctions a-périodiques continues par morceaux ($f, g \in C^0_{p,m}([0,a], \mathbb{C})$). Soient $f^N = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})$ un échantillon de N valeurs de f et $g^N = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})$ un échantillon de N valeurs de g.

(a) Montrer que l'application suivante définie un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^N$:

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{N-1} u_n \bar{v_n} \quad \text{pour} \quad u = (u_0, \cdots, u_{N-1}), v = (v_0, \cdots, v_{N-1}).$$

(b) Si on note $c^N(f) = (c_0^N(f), \cdots, c_{N-1}^N(f))$ et $c^N(g) = (c_0^N(g), \cdots, c_{N-1}^N(g))$, montrer que

$$\frac{1}{N} < f^N, g^N >=< c^N(f), c^N(g) > .$$

Exercice 3.

(1) Soit $(g_0, g_1, g_2, g_3) = (1, 2, 1, -2)$ un échantillon de 4 valeurs. Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon directement puis en utilisant le FFT.

Date: 22 novembre 2025.

(2) Soit $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) = (1, 1, 2, 2, 1, 1, -2, -2)$ un échantillon de 8 valeurs. Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon en utilisant le FFT.

Exercice 4.

(1) Soit $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 2, 3, -1)$, $(k_0, k_1, k_2, k_3) = (1, -1, 1, 2)$ deux échantillons de 4 valeurs. Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à ces échantillons en utilisant le FFT.

(2) Soit $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) = (1, 1, 2, -1, 3, 1, -1, 2)$ un échantillon de 8 valeurs. Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon d en utilisant le FFT.

Exercice 5. On considère pour $0 < \alpha < 1$ l'échantillon suivant

$$f_k = \alpha^k \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon.

(2) Étudiez en le comportement de ces coefficients pour $N = 2$.

(3) Écrire l'égalité de Parseval dans ce cas.

(4) On considère pour $0 < \beta < 1$, l'échantillon suivant

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^{k-j}\beta^j \qquad k = 0, \cdots, N-1.$$

Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon.

Exercice 6.

(1) Soit N un entier plus grand que 1. On considère pour tout entier $0 \leq \ell \leq N-1$ l'échantillon N-périodique suivant :

$$f_k^\ell = e^{2\pi i \ell \frac{k}{N}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

(a) Calculer les coefficients de Fourier discrets de cet échantillon.

(b) En déduire les coefficients de Fourier discrets de l'échantillon

$$f_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} f_k^\ell \quad \text{pour} \quad k = 0, \cdots, N-1.$$

(c) Soit $g = (g_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ un échantillon N-périodique et h_k l' échantillon N-périodique suivant :

$$h_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{k-j} g_j \qquad k = 0, \cdots, N-1,$$

Trouver les coefficients de Fourier discrets de cet échantillon, en fonction de ceux de g.